REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

COMMISSION NATIONALE D'ORGANISATION DE L'EXAMEN NATIONAL DU BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR (BTS)

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

NATIONAL COMMISSION FOR THE ORGANIZATION OF BTS EXAM

Examen National Du Brevet De Technicien Supérieur – Session De Avril-Juin 2021

Spécialité/Option : ET, MSE, MEI, MAB, CH, GCP, BA, TP, GEG, GT, IS, CM, FM, CME, CHS, MAVA, MECA, MIP, MN, NM, HSE, FC

Epreuve : MATHEMATIQUES

Crédits : ET(6), MSE(6), MEI(9), MAB(6), CH(3), GCP(3), BA(6), TP(6), GEG(6), GT(6), IS(4), CM(4), FM(4), CME(6), CHS(9), MAVA(3), MECA(3), MIP(3), MN, NM(3), HSE(3), FC(6)

Durée : 4heures

ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE (7pts)

On considère les suites réelles : (U_n) *et* (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 4U_n - 6V_n \\ V_{n+1} = U_n - V_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad (U_0; V_0) = (1; 1) \text{ On pose : } \quad X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

1- Ecrire X_{n+1} sous la forme AX_n où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera. **(0,25pt)**

2- Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$. **(0,5pt)**

3- Pour la suite on prendra $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On pose : $e_1 = (2; 1)$ *et* $e_2 = (3; 1)$. Démontrer que $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. **(0,5pt)**

a- Démontrer que e_1 *et* e_2 sont des vecteurs propres de A et préciser leurs valeurs propres associées. **(1pt)**

b- Démontrer que la matrice A est diagonalisable. **(0,5pt)**

4- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a- Déterminer D et la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Ecrire la relation qui existe entre P ; P^{-1}; A *et* D. **(1,5pt)**

b- Calculer P^{-1}. **(0,5pt)**

c- Calculer D^n *puis* A^n pour tout entier naturel n. **(1,5pt)**

d- En déduire les expressions de U_n *et* V_n en fonction de n. **(0,75pt)**

ANALYSE MATHEMATIQUE

EXERCICE (7 pts)

Le développement en série de Fourier d'un signal f continu et périodique est donné pour tout réel t par : $F(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{n^2}$

1- Justifier la convergence de $F(t)$ sur $\mathbb{R}$. **(1pt)**

2- Déterminer la période de f. **(0,5pt)**

3- Démontrer que f est un signal pair. **(0,5pt)**

4- Justifier la convergence des séries numériques de termes généraux respectifs :

$U_n = \frac{1}{n^2}$; $V_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $W_n = \frac{1}{n^4}$ **(2pts)**

5- On donne : $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. En déduire les sommes des séries numériques :

$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$. **(1,5pt)**

6- On pose $K = \int_0^{\pi} f^2(t)dt$. Sachant que $K = \frac{\pi^5}{30}$, calculer en justifiant la somme

$A = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n$. **(1,5pt)**

PROBABILITES ET STATISTIQUES

EXERCICE 1 (3pts)

En recherchant un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés des séries statistiques doubles formés de la taille et du poids d'un certain nombre d'individus, on a trouvé les résultats suivants :

- Pour 100 enfants, coefficient de corrélation 0,90 ;
- Pour 200 adultes, coefficient de corrélation 0,55 ;
- Pour 100 autres adultes, coefficient de corrélation 0,40.

1- Un ajustement linéaire est-il possible, et pour quels individus ? **(1,5pt)**

2- Y a –t-il une relation – vraie en moyenne – entre la taille et le poids de certains individus observés ? **(1,5pt)**

EXERICE 2 (3pts)

On rappelle que si X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif, alors

X prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$ *et pour tout* $x \geq 0$ on a :

$$p(X \leq x) = \int_0^x \theta e^{-\theta t}\, dt$$

La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,0004.

1- Calculer probabilité que ce composant atteigne 300 jours de vie. **(0,75pt)**

2- Calculer la probabilité qu'il vive plus de 300 jours. **(0,75pt)**

3- Sachant que ce composant électronique est en fonction depuis 300 jours, calculer la probabilité qu'il fonctionne au-delà de 500 jours. **(1,5pt)**