



DIRECTION

Paix – Travail – Patrie

DIVISION DES EXAMENS

CORRIGE HARMONISE NATIONAL

EXAMEN : PROBATOIRE-ESG

SESSION: 2021

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DUREE: 3H

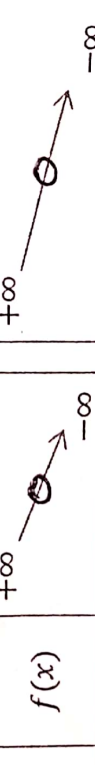
SERIE : D – TI

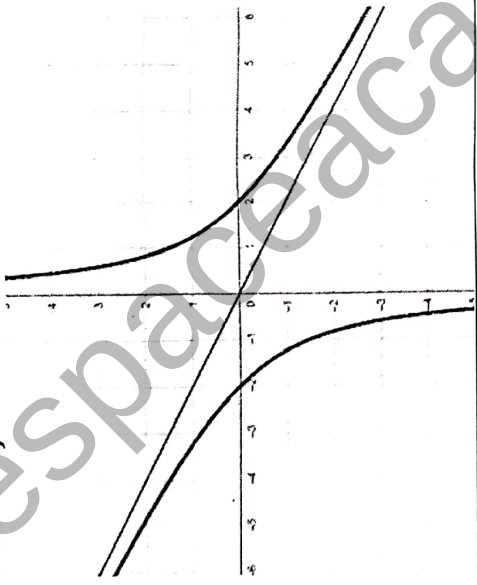
COEFFICIENT: 4

REFERENCES ET SOLUTIONS		BAREMES	COMMENTAIRES
Partie A : EVALUATIONS DES RESSOURCES			
EXERCICE 1			
1.a) Construisons le rectangle ABCD et plaçons le point O		(0,5pt)	0,25 pt pour le rectangle. 0,25 pt pour le point O. N.B. : Attribuer 0,25 pt pour une figure entièrement construite sans respect des dimensions.
b) Démontrons que $-24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD} = 12\overrightarrow{AC}$ $-24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD} = -24\overrightarrow{MA} + 12(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 12(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}).$ $= -24\overrightarrow{MA} + 24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{AB} + 12\overrightarrow{AD} + 12\overrightarrow{AD}$ $= 12(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \text{ car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $= 12\overrightarrow{AC} \text{ d'après la relation de Chasles}$		(0,5pt)	0,25 pt pour la décomposition des vecteurs. 0,25 pt pour toute réduction conduisant au résultat. N.B. : Apprécier toute autre démarche.
c) Démontrons que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4OM^2 + AC^2$ O est le milieu du segment [AC] ; on a : $MA^2 + MC^2 = 2OM^2 + OA^2 + OC^2$ (1) O est le milieu du segment [BD], on a : $MB^2 + MD^2 = 2OM^2 + OB^2 + OD^2$ (2)		(1pt)	0,25 pt pour chaque décomposition. 0,5 pt pour le résultat final.

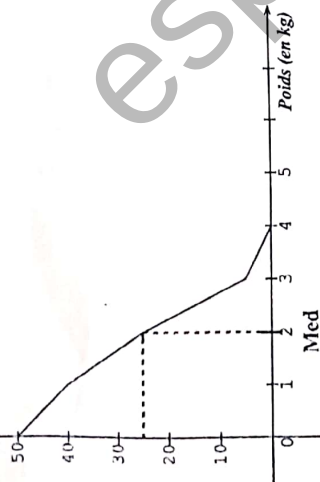
En effectuant la somme (1)+(2) et en utilisant le fait que $OA = OB = OC = OD$ $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4OM^2 + 4OA^2 = 4OM^2 + AC^2$ car $AC = 2 \times OA$		N.B. : Apprécier toute autre démarche.
2. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Σ) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \ -24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD}\ $ $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \ -24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD}\ $ $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 4OM^2 + AC^2 = 12AC$ $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 4OM^2 = 12AC - AC^2$ avec $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$ $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 4OM^2 = 12 \times 10 - 100 = 20$ $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow OM = \sqrt{5}$. Donc (Σ) décrit le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$	(1pt)	0,25 pt pour la démarche. 0,25 pt pour la nature de (Σ) . 0,25 pt pour le rayon. 0,25 pt pour le centre.
EXERCICE 2 1) Justifions que l'ensemble de définition de f est : $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et déterminons les limites aux bornes de l'ensemble de définition. $f(x)$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, ou encore $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{2}\right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{2}\right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}\right) = +\infty$	(1,25pt)	0,25 pt pour la justification du domaine. 0,25 pt pour chaque limite juste.
2) Que peut-on dire de la droite d'équation $x = 0$? La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f .	(0,25pt)	
3) Justifions que la droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$. et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$. La droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.	(0,5pt)	0,25 pt pour chaque justification.
4) Déterminons $f'(x)$ pour $x \neq 0$, son signe et le tableau des variations de f . $f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right)$. Or pour tout $x \neq 0$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right) > 0$. On conclut que pour $x \neq 0$, $f'(x) < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Le tableau de variation de f est :	(1,5pt)	0,5 pt pour la fonction dérivée. 0,25 pt pour le signe de la fonction dérivée. 0,25 pt pour chaque ligne du tableau des variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$



5) Démontrons que l'origine O du repère est centre de symétrie à la courbe de f . Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, on a $-x \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $f(-x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -f(x)$. Donc, f est une fonction impaire et par conséquent l'origine O du repère est centre de symétrie à (C_f) .	(0,5pt)	0,25 pt pour la substitution de x par $-x$. 0,25 pt pour la conclusion.
6) Traçons avec soin la courbe de f . 	(1pt)	0,25 pt pour le repère. 0,25 pt pour l'asymptote oblique. 0,25 pt pour chaque morceau de la courbe.
EXERCICE 3 1) Démontrons que $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = 0$ $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) = \cos \left(-\frac{4\pi}{12} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{6\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$	(1pt)	0,25 pt pour chaque formule. 0,25 pt pour $\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right)$. 0,25 pt pour $\cos \frac{\pi}{2}$.
2) Déduisons-en que la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ est $\frac{1}{4}$. D'après la question précédente, on a $\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} & (1) \\ \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = 0 & (2) \end{cases}$ En faisant la somme (1) + (2), on obtient $2\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.	(0,5pt)	Apprécier la démarche.
3) Résolvons dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos \frac{\pi}{12} \cos x = \frac{1}{4}$ $\cos \frac{\pi}{12} \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{12} \cos x = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ $\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{12}$ car $\cos \frac{\pi}{12} \neq 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.	(1,5pt)	0,5 pt pour : $\cos \frac{\pi}{12} \cos x = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ 0,5 pt pour les solutions dans $\mathbb{R}$. 0,5 pt pour les solutions dans $[0, 2\pi[$.

- Pour $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, la solution qui est contenue dans $[0, 2\pi[$ est $x = \frac{5\pi}{12}$. - Pour $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, la solution qui est contenue dans $[0, 2\pi[$ est $x = \frac{19\pi}{12}$. L'ensemble solution est $S = \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$																																
4) Résolvons dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\cos x - \cos \frac{5\pi}{12} > 0$ $\cos x - \cos \frac{5\pi}{12} = 0$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ a pour solution $x = \frac{5\pi}{12}$ ou $x = \frac{19\pi}{12}$. Par la suite, on dresse le tableau de signes de $\cos x - \cos \frac{5\pi}{12}$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{5\pi}{12}$</td><td>$\frac{19\pi}{12}$</td><td>2π</td></tr><tr><td>$\cos x - \cos \frac{5\pi}{12}$</td><td></td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table> Au vu de ce tableau de signes, la solution de l'inéquation est $S = \left[0, \frac{5\pi}{12} \right[\cup \left] \frac{19\pi}{12}, 2\pi \right[$	x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$	2π	$\cos x - \cos \frac{5\pi}{12}$		+	-	+	(1pt)	0,5 pt pour la démarche. 0,25 pt pour chaque intervalle de l'ensemble-solution.																				
x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$	2π																												
$\cos x - \cos \frac{5\pi}{12}$		+	-	+																												
EXERCICE :4 1) Déterminons le poids moyen de ces lapins <table><tr><td>Poids des lapins</td><td>$[0, 1[$</td><td>$[1, 2[$</td><td>$[2, 3[$</td><td>$[3, 4[$</td><td>Total</td></tr><tr><td>Effectifs (n_i)</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>5</td><td>50</td></tr><tr><td>Centres (c_i)</td><td>0,5</td><td>1,5</td><td>2,5</td><td>3,5</td><td></td></tr><tr><td>$n_i \times c_i$</td><td>5</td><td>22,5</td><td>50</td><td>17,5</td><td>95</td></tr><tr><td>ECD</td><td>50</td><td>40</td><td>25</td><td>5</td><td></td></tr></table> ECD : effectifs cumulés décroissants Le poids moyen des lapins est : $\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^4 n_i \times c_i = \frac{95}{50} = 1,9$. Soit 1,9 kg.	Poids des lapins	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	Total	Effectifs (n_i)	10	15	20	5	50	Centres (c_i)	0,5	1,5	2,5	3,5		$n_i \times c_i$	5	22,5	50	17,5	95	ECD	50	40	25	5		(0,75pt)	0,5 pt pour la démarche. 0,25 pt pour le résultat. N.B. : Le tableau ci-contre n'est pas exigé.
Poids des lapins	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	Total																											
Effectifs (n_i)	10	15	20	5	50																											
Centres (c_i)	0,5	1,5	2,5	3,5																												
$n_i \times c_i$	5	22,5	50	17,5	95																											
ECD	50	40	25	5																												
2) Construction du polygone des effectifs cumulés décroissants	(1,5pt)	0,25 pt pour chaque point bien placé. 0,25 pt pour l'allure du polygone.																														



3) Déterminons la médiane de cette série statistique

Graphiquement, on voit que la médiane $M_e = 2$

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

REFERENCES ET SOLUTIONS

1. Déterminons la façon dont on doit choisir le nombre d'ordinateurs à assembler mensuellement pour ne pas fonctionner à perte.

Soit x le nombre d'ordinateurs produit et vendu au cours d'un mois. On définit les charges liées à la production par : $P(x) = 1120 + 0,00007x^2$ et le montant de la vente des ordinateurs est : $V(x) = 0,7x$

Le bénéfice obtenu est : $B(x) = V(x) - P(x) = -0,00007x^2 + 0,7x - 1120$

Comme le bénéfice doit être positif, on a donc $-0,00007x^2 + 0,7x - 1120 \geq 0$

• On résout l'équation : $-0,00007x^2 + 0,7x - 1120 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0,7)^2 - 4(0,00007) \times 1120 = 0,1764 = (0,42)^2$$

$$\text{Les solutions : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,7 - 0,42}{2 \times (-0,00007)} = 8000 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,7 + 0,42}{2 \times (-0,00007)} = 2000$$

• On dresse un tableau de signes de $B(x) = -0,00007x^2 + 0,7x - 1120$

x	0	2000	8000	$+\infty$
$B(x)$		-	+	-

On doit donc choisir la production du nombre d'ordinateurs entre 2000 et 8000 ordinateurs pour que l'entreprise ne tourne pas à perte

2. Déterminons le nombre d'ordinateurs que cet industriel doit produire mensuellement pour réaliser un bénéfice maximal ?

(0,75pt) Apprécier toute autre justification.

CRITERES

C1 :

Interprétation correcte de la situation

C2 : utilisation correcte des outils

INDICATEURS

0,25 pt pour : $0,7x$.

0,25 pt pour :

$$0,7x \geq 1120 + 0,00007x^2$$

N.B. : Donner 0.5 pt à tout candidat qui écrit :

Prix de vente $\geq$ Dépenses.

0,25 pt pour les racines de

$$B(x) = 0.$$

0,25 pt pour :

$$x \in [2000; 8000].$$

N. B. : Attribuer la totalité des points même si $B(x)$ n'est pas correct.

0,25 pt pour

l'enchaînement logique.

0,25 pt pour une conclusion cohérente.

0,5 pt pour la fonction

bénéfice qui à $x \mapsto B(x)$.

Soit x le nombre d'ordinateurs produit et vendu au cours d'un mois. On a défini la fonction bénéfice par : $B(x) = -0,00007x^2 + 0,7x - 1120$ B est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $B'(x) = -0,00014x + 0,7$ $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0,7}{0,00014} = 5000$. Ainsi donc : Si x est contenu dans l'intervalle $[2000, 5000]$ le bénéfice est croissant et si x est contenu dans l'intervalle $[5000, 8000]$ le bénéfice est décroissant. Le nombre d'ordinateurs qui rend le bénéfice maximal est atteint pour la vente de 5000 ordinateurs.	correcte de la situation	
	C2 : utilisation correcte des outils	0,25 pt pour le sens de variations de B . 0,25 pt pour la valeur 5000.
	C3 : cohérence	0,25 pt pour l'enchaînement logique. 0,25 pt pour une conclusion cohérente.
3. Déterminons la capacité de production journalière des composantes MOS Pour fabriquer la première composante, le temps mis est : $t_1 = 3 \text{ min} = 180 \text{ s}$ Pour fabriquer la deuxième composante, le temps mis est : $t_2 = 3 \text{ min } 2 \text{ s} = (180 + 2) \text{ s}$ Pour fabriquer la troisième composante, le temps mis est : $t_3 = 3 \text{ min } 4 \text{ s} = (180 + 4) \text{ s}$ De proche en proche, on construit une suite arithmétique (t_n) de premier terme $t_1 = 180 \text{ s}$ et de raison $r = 2$ et de terme général $t_n = 180 + 2(n - 1) \quad (n \geq 1)$. Or $t_n = 3 \text{ h } 59 \text{ min} = 14340$. On a donc : $180 + 2n - 2 = 14340$. Ou encore $n = 7081$. On conclut que la production journalière est de 7081 composantes.	C1 : interprétation correcte de la situation C2 : utilisation correcte des outils C3 : cohérence	0,5 pt pour $t_{n+1} = t_n + 2$. 0,25 pt pour l'expression de t_n en fonction de n . 0,25 pt pour 7081. 0,25 pt pour l'enchaînement logique. 0,25 pt pour une conclusion cohérente.
	(0,5pt)	

Fait à Yaoundé le, 24 Juin 2021.

Le Président du jury d'harmonisation



OMOCK Antoine, IPN/MATHS : Tél. : 655061344 ou 698078689