Ministère des enseignements secondaires
Inspection pédagogique / sciences
Section mathématiques

Examen : Probatoire blanc
Session : 2022
Épreuve : Mathématiques
Séries : D et TI
Durée : 3h
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux parties A et B obligatoires

Partie A : Évaluation des ressources / 15 points

La partie A comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : 4 points

I. Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées, mais une seule est juste. Recopier le numéro de la question suivi de la lettre correspondante à la bonne réponse.

1) Quelle est l'expression analytique de l'homothétie h de centre $\Omega(-2;3)$ et de rapport $k=-3$? **0,5pt**

$a)\begin{cases}x'=x-2\\y'=y+3\end{cases}$ $b)\begin{cases}x'=-3x+4\\y'=-3y-6\end{cases}$ $c)\begin{cases}x'=-3x-8\\y'=-3y+12\end{cases}$ $d)\begin{cases}x'=3x+8\\y'=3y-12\end{cases}$.

2) Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe dont la somme des degrés est 24 ? **0,5pt**

$a)$ 9 arêtes $b)$ 12 arêtes c) 8 arêtes $d)$ 48 arêtes.

3) Trois points A, B et C du plan sont tels que : $\overrightarrow{AC}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$. Quel est le couple de nombres réels $(b;c)$ tel que A soit le barycentre des points pondérés $(B;b)$ et $(C;c)$?

a) $(2;-3)$ $b)$ $(-3;2)$ c) $(3;5)$ $d)$ $(5;3)$. **0,5pt**

II. On considère l'équation (E) : $2Cos^2 2x+(1-2\sqrt{3})Cos\,2x-\sqrt{3}=0$.

1) Montrer que $(1+2\sqrt{3})^2=13+4\sqrt{3}$. **0,5pt**
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+(1-2\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$. **1pt**
3) En déduire la résolution dans $[0;2\pi[$ de l'équation (E). **1pt**

Exercice 2 : 4 points

Les notes obtenues en mathématiques par des élèves d'une classe de première ont été regroupées dans le tableau ci-après :

Notes	$[1;6[$	$[6;10[$	$[10;16[$	$[16;20[$
Effectifs	7	14	19	10

1) Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants de cette série. **1,25pt**
2) Calculer la médiane et l'arrondi d'ordre deux de l'écart-type de cette série statistique. **1,5pt**
3) Ce même jour le professeur d'EPS a fait une évaluation d'une course de résistance avec tous les élèves présents. On appelle « podium », l'arrivée dans l'ordre des trois premiers sans ex aequo. Chaque élève peut faire partie du podium.

a) Déterminer le nombre de podiums possibles. **0,5pt**
b) Déterminer le nombre de podiums où le premier est un élève ayant obtenu une moyenne supérieure ou égale à 16 /20. **0,75pt**

Exercice 3 : 3,5 points

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = \frac{2x}{3+x}$.

1) Calculer les limites de f en $-\infty$; $+\infty$ et -3 à gauche et à droite. **1pt**
2) En déduire que la courbe de la fonction f admet deux asymptotes dont on précisera les équations cartésiennes. **0,5pt**
3) Déterminer la dérivée f' de la fonction f et donner le sens de variation de f. **1pt**
4) Dresser le tableau des variations de f. **0,5pt**
5) Montrer que le point $A(-3; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f. **0,5pt**

Exercice 4 : 3,5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1) Calculer u_1 et u_2. **0,5pt**
2) On pose $v_n = u_n - 4$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **1pt**
3) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 4 + \frac{4}{2^n}$. **1pt**
4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n. **1pt**

Partie B : Évaluation des compétences / 5 points

Situation :

Ambassa a bénéficié de ses droits de départ à la retraite qui s'élèvent à 5 000 000 F CFA qu'il dépose dans un compte à un taux annuel d'intérêts composés. Au terme de la deuxième année, le compte d'Ambassa dans cette banque a un montant de 5 408 000 F CFA. L'ami d'Ambassa lui avait proposé au départ de verser ce montant dans une banque appliquant un taux d'intérêt annuel de 3,5 %.

Ambassa achète avec l'argent retiré à la banque un terrain rectangulaire d'aire 529 m^2 et de périmètre minimal dont il ignore les dimensions.

Sur une partie de son terrain, Ambassa voudrait faire l'élevage et souhaite protéger son bétail par une clôture. Cette clôture est constituée d'après un technicien des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 234$ où A et B sont deux points du terrain d'Ambassa distants de 18 m. Cette clôture comportera 3 rangées de fils barbelé vendu à 1600F le mètre.

Tâches :

1) Est-ce-que Ambassa a fait un bon choix de la banque par rapport au taux d'intérêt appliqué ? **1,5pt**
2) Déterminer les dimensions du terrain d'Ambassa. **1,5pt**
3) Déterminer le montant minimal qu'Ambassa doit prévoir pour la construction de l'enclos afin de protéger son bétail ? Prendre $\pi = 3,15$. **1,5pt**

Présentation : **0,5pt**

Proposition Correction Epreuve Zéro, Maths, PD, 2022 :

Partie A :

Exercice 1 :

I. 1) Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $M' = h(M)$. Alors :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -3\,\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'+2 \\ y'-3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

1) c)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3x - 8 \\ y' = -3y + 12. \end{cases}$$

2) La somme des degrés est le double du nombre d'arêtes. 2) b)

3) $A = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b & c \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ b + c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (b;c) = (-3;5).$$

II, 1.

$$(1+2\sqrt{3})^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2(1)(2\sqrt{3})$$
$$= 1 + 4\times 3 + 4\sqrt{3}$$
$$= 13 + 4\sqrt{3}.$$

2) $2x^2 + (1-2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (1-2\sqrt{3})^2 - 4(2)(-\sqrt{3})$$
$$= 13 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$
$$= 13 + 4\sqrt{3} = (1+2\sqrt{3})^2.$$

$$x = \frac{-1+2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}}{2\times 2} \text{ ou } x = \frac{-1+2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}}{2\times 2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

3) (E) : $2\cos^2 2x + (1-2\sqrt{3})\cos 2x - \sqrt{3} = 0$

Posons $\cos(2x) = X$.

(E) $\Leftrightarrow 2X^2 + (1-2\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$.

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(2x) = \sqrt{3} > 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \dfrac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

$0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k < \frac{5}{3} \simeq 1,67.$

$\Leftrightarrow k \in \{0 ; 1\}.$

ie $x = \frac{\pi}{3} + 0\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 1 \times \pi$

ie $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

$0 \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k < \frac{7}{3} \simeq 2,33$

$\Leftrightarrow k \in \{1 ; 2\}.$

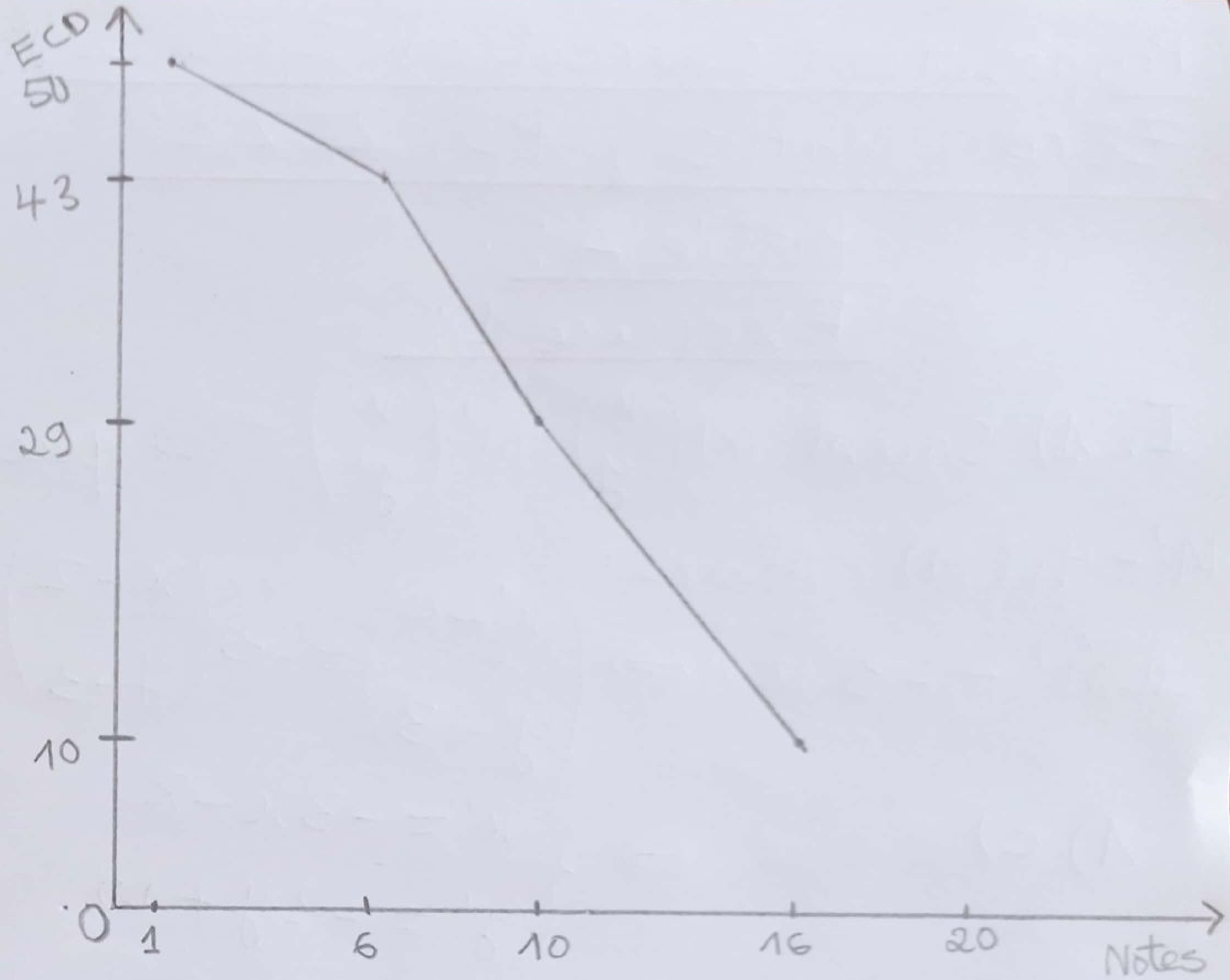
ie $x = -\frac{\pi}{3} + 1\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \times \pi$

ie $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

$S^{(E)}_{[0 ; 2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}.$

Exercice 2 :

Notes	[1;6[	[6;10[	[10;16[	[16;20[	Total
Effectifs n_i	7.	14.	19	10	50.
ECD	50	43	29	10	
Centres c_i	3,5	8.	13	18.	
$n_i c_i$	24,5	112	247	180	563,5
$n_i c_i^2$	85,75	896	3211	3240.	7432,75



Abscisses : 1 cm → 2 unités

Ordonnées : 1 cm → 5 unités

2) * Médiane Me :

$\frac{50}{2} = 25 \in]10 ; 29[$. Alors,

$\frac{Me - 10}{25 - 29} = \frac{16 - 10}{10 - 29}$

ie $\frac{Me - 10}{-4} = \frac{6}{-19}$

ie $M_e \simeq 11,26.$

* Ecart-type :

$$\sigma = \sqrt{V} \text{ et } V = \left(\frac{1}{N}\sum n_i c_i^2\right) - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{563,5}{50} = 11,27.$$

$$V = \frac{7432,75}{50} - (11,27)^2 = 21,6421$$

$$\sigma = \sqrt{V} \simeq 4,65.$$

3) a) Le nombre de podiums possibles est $A_{50}^3 = 117600$.

b) Il y a 10 élèves ayant au moins 16/20. Le nombre de podiums est

donc : $A_{10}^1 \times A_{49}^2 = 23520$.

Exercice 3 :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{3+x}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{3+x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$	

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} 2x = -6 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} 3+x = 0^- \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} f(x) = +\infty.$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} 2x = -6 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} 3+x = 0^+ \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} f(x) = -\infty.$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ donc $(D_1) : y = 2$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} f(x) = +\infty$ donc $(D_2) : x = -3$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

3) f est dérivable sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-3;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles.

$$\forall x \neq -3;\ f'(x) = \frac{(2x)'(3+x) - (3+x)'(2x)}{(3+x)^2}$$

$$= \frac{2(3+x) - 2x}{(3+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(3+x)^2}$$

$\forall x \neq -3,\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-3;+\infty[$.

4)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

5) Soit $x \neq -3$. alors $-x \neq 3$
ie $-6-x \neq -3$

Montrons que $f(-6-x) + f(x) = 2(2)$.

$$f(-6-x) + f(x) = \frac{2(-6-x)}{-6-x+3} + \frac{2x}{3+x}$$

$$= \frac{+12+2x}{3+x} + \frac{2x}{3+x}$$

$$= \frac{12+4x}{3+x}$$

$$= \frac{4(3+x)}{3+x}$$

$$= 4 = 2 \times 2.$$

Exercice 4 :

1) $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 2$.
$= \frac{1}{2} \times 8 + 2 = 6$.

$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 2 = \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5$.

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$
$= \frac{1}{2} u_n + 2 - 4$
$= \frac{1}{2} u_n - 2$
$= \frac{1}{2}(u_n - 4)$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 4 = 4$.

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 (q)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

i.e $V_n = \frac{4}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$V_n = U_n - 4 \Leftrightarrow U_n = 4 + V_n$

$\Leftrightarrow U_n = 4 + \frac{4}{2^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$= (V_0+4) + (V_1+4) + \dots + (V_n+4)$

$= (V_0 + V_1 + \dots + V_n) + 4(n-0+1)$.

$= 4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 4(n+1)$

$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 4(n+1)$.

Partie B :

1) En déposant 5000000 au taux d'intérêt annuel de 3,5% il aura $\frac{3,5}{100} \times 5000000 = 175000$ FCFA par an. Après 2 ans, le montant de de son compte sera donc de $5350000F < 5408000F$.

Ambassa a donc fait un bon choix.

2) Soient x et y respectivement la longueur et la largeur de ce terrain.

L'aire est $A(x) = xy = 529$.

i.e $y = \frac{529}{x}$.

Le périmètre est $P(x) = 2(x+y)$

i.e $P(x) = 2\left(x + \frac{529}{x}\right)$.

Cherchons la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimal.

$P'(x) = 2\left(1 - \frac{529}{x^2}\right)$

$= 2\frac{x^2-529}{x^2} = \frac{2(x-23)(x+23)}{x^2}$.

x	0		23		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	92	$\nearrow$	$+\infty$

Le périmètre est donc minimal pour $x = 23$.

$x = 23 \Leftrightarrow y = \frac{529}{23} = 23.m$

Le terrain d'Ambassa est carré de côté 23 m.

3) Soit $I = mil[AB]$.

$MA^2 + MB^2 = 234 \Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 234$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2\vec{MI}.(\vec{IA} + \vec{IB}) + 2IA^2 = 234$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2\times(9)^2 = 234.$

$\Leftrightarrow MI = 6$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I; 6).$

Le périmètre de ce cercle est :

$P = 2\pi r = 2\pi\times 6 = 12\pi = 37,8m.$

Pour 3 rangées de fil barbelé, il faut donc 113,4 m qui coûtent 181440 F.

Ambassa doit donc prévoir au moins 181 440 F pour la construction de l'enclos.