CONCOURS D'ENTREE EN 1$^{\text{ère}}$ ANNEE
ENSET
session de 2014
CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : F et BT

Exercice 1 :

1) **Vérifions que** $Z = \frac{1}{1+i}$

$$\text{On a: } Z = \frac{1}{1+iRC\omega} = \text{or } RC\omega = 50 \times 2 \times 10^{-2} = 1$$

$$\text{Donc } \boxed{Z = \frac{1}{1+i}}$$

Écrivons le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminons le module et un argument de Z.

$$Z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{Donc } \boxed{Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$\text{Par ailleurs, } |Z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Donc } \boxed{|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Arg(Z) = -\frac{\pi}{4}}$$

2) Si $|Z_s| = 2|Z_e|$ on aura

$$|Z| = \left|\frac{Z_s}{Z_e}\right| = \frac{|Z_s|}{|Z_e|} = 2 \text{ ce qui contredit (1) donc } |Z_s| \neq 2|Z_e|$$

3) **On pose** $Arg(Z) = \frac{\pi}{2}$. **Déterminons** $arg(Z_e)$

$$Z = \frac{Z_s}{Z_e} \Rightarrow Arg(Z) = Arg(Z_s) - Arg(Z_e)$$

$$Arg(Z_e) = Arg(Z_s) - Arg(Z) = \frac{3\pi}{4}$$

$$Donc\ \boxed{Arg(Z_e) = \frac{3\pi}{4}}$$

4) On suppose dans cette question que $Z_e = 150(-\sqrt{3} + i)$

a. Déterminons l'écriture du nombre complexe Z_e sous la forme $re^{i\alpha}$.

$$Z_e = 150(-\sqrt{3} + i) = 300\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 300e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$Donc\ \boxed{Z_e = 300e^{i\frac{5\pi}{6}}}\quad prendre\quad r = 300\ et\ \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

b. Déterminons la forme complexe de Z_s correspondant

$$Z = \frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{Z_s}{Z_e}\quad or\ Z_e = 300e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

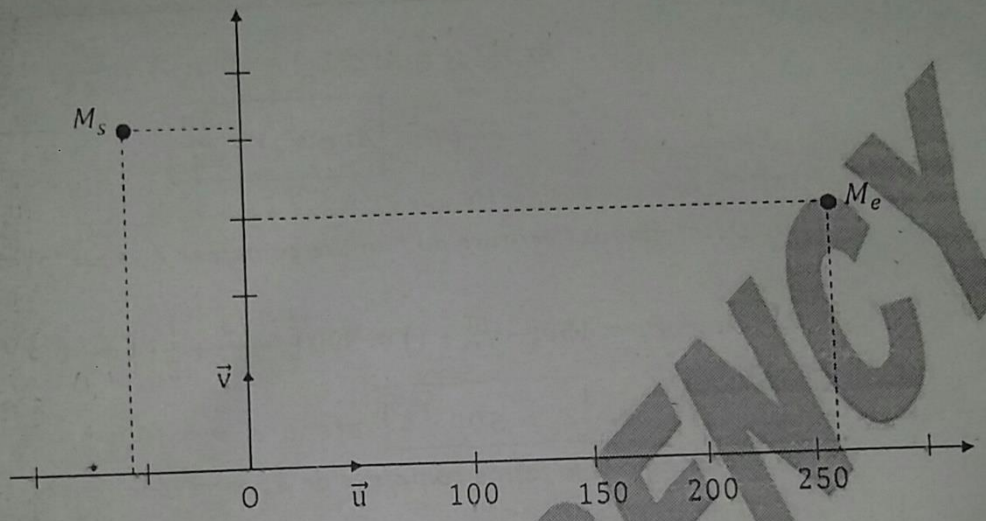
$$\Rightarrow\ Z_s = Z.Z_e = 150\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = 150\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$Donc\ \boxed{Z_s = 150\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

c. Plaçons les points M_e et M_s images respectives des nombres complexes Z_e et Z_s.

$$Z_e = 150(-\sqrt{3} + i)\ \Rightarrow\ M_e\binom{259{,}8}{150}$$

$$Z_s = 150\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right)\ \Rightarrow\ M_s\binom{-55{,}15}{203{,}6}$$



Exercice 2 :

1) **Déterminons la liste des montages différents possibles et en déduire leur nombre totale (exemple : F_1 avec B_2; F_2 avec B_1 et F_3 avec B_3 est l'un des montages possibles).**

$$\left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_1 \\ F_2 \longrightarrow B_2 \\ F_3 \longrightarrow B_3 \end{matrix}\right\}(1) \; ; \quad \left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_1 \\ F_2 \longrightarrow B_3 \\ F_3 \longrightarrow B_2 \end{matrix}\right\}(2) \; ; \quad \left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_2 \\ F_2 \longrightarrow B_1 \\ F_3 \longrightarrow B_3 \end{matrix}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_3 \\ F_2 \longrightarrow B_2 \\ F_3 \longrightarrow B_1 \end{matrix}\right\}(4) \; ; \quad \left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_2 \\ F_2 \longrightarrow B_3 \\ F_3 \longrightarrow B_1 \end{matrix}\right\}(5) \; ; \quad \left.\begin{matrix} F_1 \longrightarrow B_3 \\ F_2 \longrightarrow B_2 \\ F_3 \longrightarrow B_1 \end{matrix}\right\}(6)$$

Donc on a 6 montages différents possibles

2) **Calculons la probabilité que les trois fils soient convenablement branchés.**

$$\boxed{P = \frac{1}{6}}$$

3) Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire

x_i	500	0	0	0	0	0
$P(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Problème :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1-a) On note g' la dérivée de la fonction g. calculons $g'(x)$ et étudions son signe, pour, x appartenant à l'intervalle I.

$$g'(x) = (x^2 + 3 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = 0 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x = 1$$

D'où le tableau de signe de $g'(x)$ suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

b) Dressons le tableau de variation de la fonction g (sans les limites en 0 et en $+\infty$)

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

2) Calculons $g(1)$, et déduisons le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

$$g(1) = 4 \text{ on en déduit que } \forall\, x \in I, \quad g(x) > 0$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}, \forall\, x \in I$$

4-a) Etudions la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x} \quad \text{quand } x \longrightarrow 0^+, x \longrightarrow +\infty$$

$$\text{et } f(x) = \frac{1}{2X} - X - X\ln X \quad \Rightarrow \quad \lim_{X \to +\infty} f(X) = -\infty$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à droite de O.

b) Etudions la limite de f en $+\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

$$\text{Donc } \boxed{g'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}}$$

d) Déduisons de la partie A le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.

on sait de la partie A que $\forall\, x \in I, g(x) > 0$. Donc $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est strictement croissante sur I.

e) Etablissons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5- Soit D la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

d) Montrons que la droite D est asymptote à la courbe C

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à (C)

e) Déterminons par calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe C et de la droite D.

Ses coordonnées sont solution du système

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2x} \Rightarrow x = e^{1/2}$$

$$or\ y = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{e^{1/2}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$D'où\ E\begin{pmatrix} \sqrt{e} \\ \frac{\sqrt{e}}{2} \end{pmatrix}$$

f) Sur l'intervalle I, déterminons la position de la courbe C par rapport à la droite D.

$$On\ a:\ f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{-1 + 2\ln x}{2x}$$

$$-1 + 2\ln x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

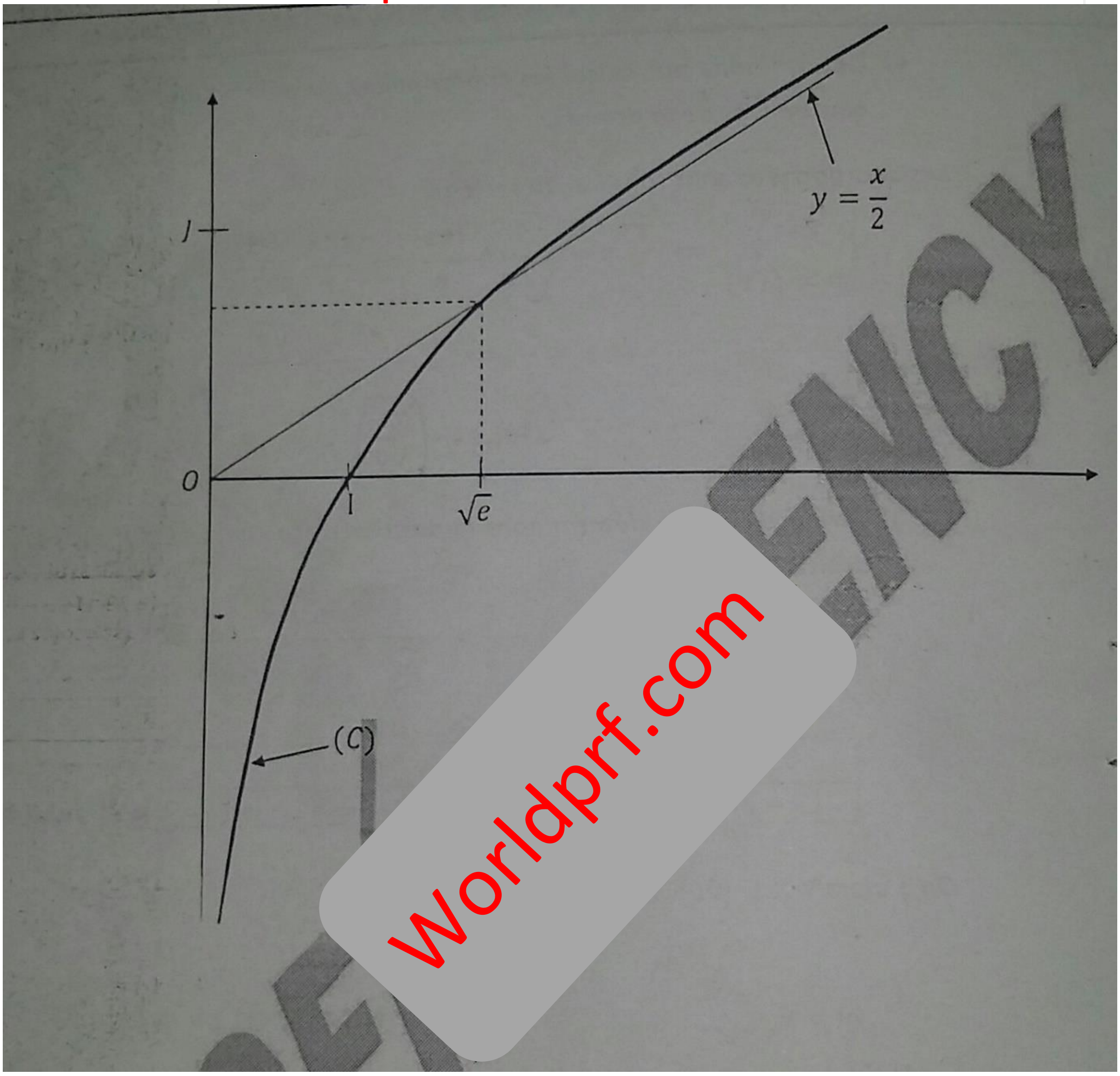
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$-1 + 2\ln x = 0$	‖	$-$	0	$+$	

On a alors $\forall\ x \in \left]0; \sqrt{e}\right],\ f(x) - \frac{x}{2} \leq 0$

$$ie\ f(x) \leq \frac{x}{2}\ donc\ (C)\ est\ au\ dessous\ de\ (D)$$

$$et\ \forall\ x \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right[,\quad f(x) \geq \frac{x}{2}\ donc\ (C)\ est\ en\ dessus\ (D)$$

4) En utilisant les résultats précédents, traçons avec soins dans le même repère (O, i, j) la droite D et la courbe C.


J
O
1
$\sqrt{e}$
$y = \frac{x}{2}$
(C)
Worldprf.com