CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ANNEE
ENSET
session de 2016
CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : F et BT

I/

1/ Calculons la probabilité d'apparition de chaque face.

La probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle donc :

$$\frac{P(1)}{1} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}$$

Ce $P(2) = 2P(1)$; $P(3) = 3P(1)$; $P(4) = 4P(1)$; $P(5) = 5P(1)$; $P(6) = 6P(1)$

Par ailleurs, $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$$\Rightarrow P(1) + 2P(1) + 3P(1) + 4P(1) + 5P(1) + 6P(1) = 1$$

$$\Rightarrow 21P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{21}$$

Ainsi, $P(2) = \frac{2}{21}$; $P(3) = \frac{3}{21}$; $P(4) = \frac{4}{21}$; $P(5) = \frac{5}{21}$ et $P(6) = \frac{6}{21}$

d'où $\boxed{P(1) = \frac{1}{21} ; P(2) = \frac{2}{21} ; P(3) = \frac{3}{21} ; P(4) = \frac{4}{21} ; P(5) = \frac{5}{21} \text{ et } P(6) = \frac{6}{21}}$

2/ Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Soit $P(pair)$ cette probabilité. On a :

$$P(pair) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Donc $\boxed{P(pair) = \frac{4}{7}}$

II/

1/ Déterminons les réels a et b tels que :

$$\frac{x-2}{(x-3)^2} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2}$$

$$on\ a: \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} = \frac{a(x-3)}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} = \frac{ax-3a+b}{(x-3)^2}$$

$$Ainsi, \frac{x-2}{(x-3)^2} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} \Rightarrow \frac{x-2}{(x-3)^2} = \frac{ax-3a+b}{(x-3)^2}$$

$$et\ par\ identification\ des\ termes, \begin{cases} a = 1 \\ -3a+b = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

$$Donc\ \boxed{a = b = 1}$$

2/ Calculons $I = \int_1^2 \frac{x-2}{(x-3)^2} dx$

$$a = b = 1 \Rightarrow \frac{x-2}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

$$ainsi, I = \int_1^2 \frac{x-2}{(x-3)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x-3} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$I = \int_1^2 \frac{(x-3)'}{x-3} dx + \int_1^2 \frac{(x-3)'}{(x-3)^2} dx = [\ln|x-3|]_1^2 - \left[\frac{1}{x-3}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$donc\ \boxed{I = \frac{1}{2} - \ln 2}$$

3/ Calculons: $J = \int_0^{\ln 2} \frac{\exp(2x) - 2\exp(x)}{(\exp(x)-3)^2} dx$

$$on\ a: \frac{\exp(2x) - 2\exp(x)}{(\exp(x)-3)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x}{(e^x-3)^2} = \frac{e^x(e^x-2)}{(e^x-3)^2}$$

$$= e^x\left(\frac{1}{e^x-3} + \frac{1}{(e^x-3)^2}\right)$$

$$donc\ \frac{\exp(2x) - 2\exp(x)}{(\exp(x)-3)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x}{(e^x-3)^2} = \frac{e^x}{e^x-3} + \frac{e^x}{(e^x-3)^2}$$

$$Et\ donc\ J = \int_0^{\ln 2} \frac{\exp(2x) - 2\exp(x)}{(\exp(x)-3)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x}{e^x-3} + \frac{e^x}{(e^x-3)^2}\right) dx$$

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x-3)'}{e^x-3} dx + \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x-3)'}{(e^x-3)^2} dx$$

$$= [\ln|e^x - 3|]_0^{\ln 2} + \left[-\frac{1}{(e^x-3)^2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$donc \ \boxed{J = \frac{1}{2} - \ln 2}$$

Calculons aussi $K = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 2}{x(\ln x - 3)^2} dx$

$$on\ a: \frac{\ln x - 2}{x(\ln x - 3)^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x - 2}{(\ln x - 3)^2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x - 3} + \frac{1}{(\ln x - 3)^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x - 3} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x - 3)^2}$$

$$d'où\ K = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 2}{x(\ln x - 3)^2} dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x - 3} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x - 3)^2}\right) dx$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{(\ln x - 3)'}{\ln x - 3} dx + \int_e^{e^2} \frac{(\ln x - 3)'}{(\ln x - 3)^2} dx$$

$$= [\ln|\ln x - 3|]_e^{e^2} + \left[-\frac{1}{\ln x - 3}\right]_e^{e^2}$$

$$= [\ln|\ln e^2 - 3| - \ln|\ln e - 3|] \left(-\frac{1}{\ln e^2 - 3} + \frac{1}{\ln e - 3}\right)$$

$$= \ln|2 - 3| - \ln|1 - 2| - \frac{1}{2-3} + \frac{1}{1-3}$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$donc\ \boxed{K = \frac{1}{2} - \ln 2}$$

III/

Soit la fonction f définie par $f(x) = Exp(x)(2 + x)$

1. Déterminons le tableau de variation de f

✓ **Domaine de définition**

La fonction f est le produit de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Don

$D_f = \mathbb{R}$

✓ **Limites**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

✓ **Dérivée et sens de variation de f**

La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \left(Exp(x)(2+x)\right)' = e^x(2+x) + e^x = e^x(3+x)$$

$$f'(x) = 0 \implies x = -3$$

Ainsi pour $x \in]-\infty, -3[$ $f'(x) < 0$ f est donc décroissante

Pour $x \in]-3, +\infty[$ $f'(x) > 0$ f est donc croissante.

✓ ***Tableau de variation de f***

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-e^{-3}$	↗	$+\infty$

2. Exprimons la dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}(x)$ de la fonction f(x)

On voit aisément que :

$f'(x) = e^x(2+1+x)$; $f''(x) = e^x(2+2+x)$; $f^{(3)}(x) = e^x(2+3+x)$

$f^{(4)}(x) = e^x(2+4+x)$; $f^{(5)}(x) = e^x(2+5+x)$ et ainsi de suite ..

$$f^{(n)}(x) = e^x(2+n+x)$$

3. Déterminons le point d'inflexion de f et l'asymptote et la direction asymptotique à la courbe représentative de f.

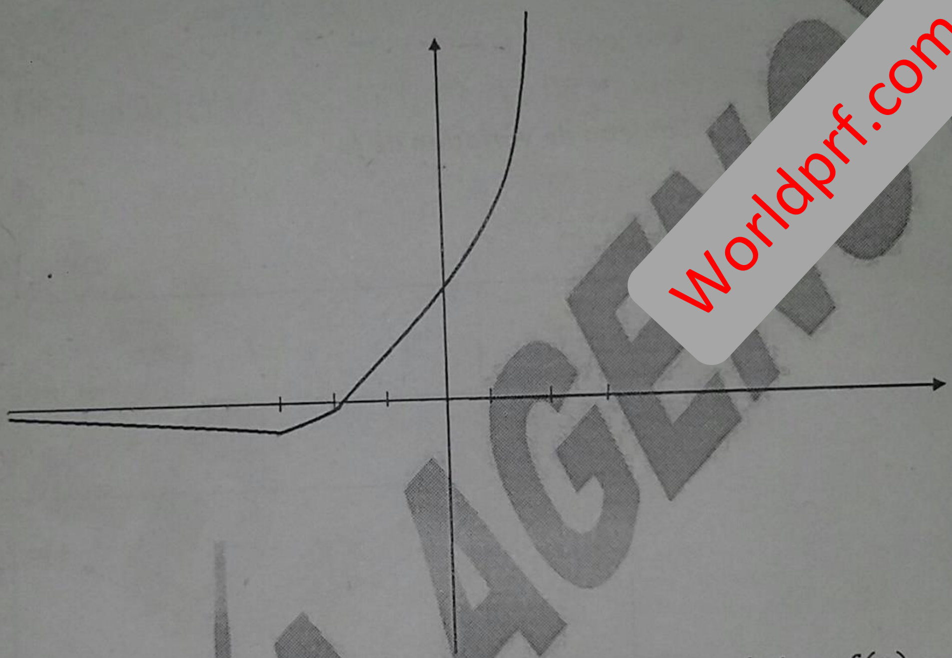
On a : $f''(x) = e^x(x+4) = 0 \implies x = -4$ et par ailleurs en $x = -4$ la dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe

Donc le point $A\binom{-4}{-2e^{-4}}$ est un point d'inflexion.

On voit aussi que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

4. Traçons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct.



5/ Déterminons le nombre de racines de l'équation paramétrique $f(x) = m$

- ✓ Si $m = -e^{-3}$ alors $f(x) = m \Rightarrow x = -3$
- ✓ Si $m > -e^{-3}$ alors d'après le tableau de variation $f(x) = m$ admet deux solutions $x_1 \in]-\infty; -3[$ et $x_2 \in]-3; +\infty[$
- ✓ Si $m < -e^{-3}$ alors $f(x) = m \Rightarrow \boxed{S = \{\ \}}$