CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ANNEE
ENSET
session de 2017
CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : F et BT

EXERCICE 1 :

Expression du courant électrique dans un condensateur

On a: $v = V_m\{\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \cdots\}$

Par ailleurs, on sait que: $v = \frac{1}{C}\int i dt \Longrightarrow i = C\frac{dv}{dt}$

Soit donc $i = CV_m\{\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \cdots\}'$

$$= C\omega V_m\{1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \cdots\}$$

D'où $i = C\omega V_m\{1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \cdots\}$

EXERCICE 2 :

Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \neq -1$; $Arg(u) = \theta$ et $|u| = 1$

On déduit donc que $u = e^{i\theta}$

a) **Calcul du module et de l'argument de $\frac{1-u}{1+u}$.**

$$\frac{1-u}{1+u} = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1+\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \frac{\big((1-\cos\theta) - i\sin\theta\big)\big((1+\cos\theta) - i\sin\theta\big)}{\big((1+\cos\theta) + i\sin\theta\big)\big((1+\cos\theta) - i\sin\theta\big)}$$

$$= \frac{-i\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit donc $\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ et $Arg(\frac{1-u}{1+u}) = -\frac{\pi}{2}$

b) Déduction du module et argument de Z.

On a : $\frac{2+iZ}{2-iZ} = u \Longrightarrow Z = \frac{2u-2}{i(1+u)} = 2i\,\frac{1-u}{1+u}$

On déduit donc $|Z| = |2i| \times \left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$|Z| = \frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Et $Arg(Z) = Arg(2i) + Arg(\frac{1-u}{1+u}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{Arg(Z) = 0}$

<u>EXERCICE 3</u> :

On pose $I=\int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^4x dx$ $J=\int_{\pi/4}^{\pi/2} sin^4x dx$ $K=\int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^2x sin^2x dx$

1- Calcul de I+K et J+K

$I+K= \int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^4x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^2x sin^2x dx$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^2x(cos^2x + sin^2x)\, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^2x dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x + \frac{1}{2}sin2x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Donc $I + K = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

$$J + K = \int_{\pi/4}^{\pi/2} sin^2x(cos^2x + sin^2x)\, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} sin^2x dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2}sin2x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

Donc $J + K = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

2- Calcul de $I - K$; $I + J + 2K$; $I + J - 2K$.

$$I - K = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\cos 2x dx$$

$$I - K = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos^2 2x + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\frac{1}{2}(\cos 4x + 1) + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{2}\sin 2x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}$$

Donc $I - K = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}$

$$I + J + 2K = I + K + J + K$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Donc $I + J + 2K = \frac{\pi}{4}$

$$I + J - 2K = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 x dx - 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos^4 x + \sin^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x) dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}[x + \frac{1}{4}\sin 4x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Donc $I + J - 2K = \frac{\pi}{8}$

Déduisons I, J, K

On a le système suivant $\begin{cases} I+K=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} \\ I-K=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 2I=\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{2}$ donc $I=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}$ et

$$K=\frac{\pi}{32}$$

On en déduit que $J=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}-K=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4} \Rightarrow J=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$

EXERCICE 4 :

On désigne par $f(t)$ le signal électrique donc la représentation est donnée par la figure 1.

D'après cette figure, on voit que :

$$f(t)=\begin{cases} \frac{V}{\pi}\omega t \text{ si } & 0\leq t\leq \pi \\ & \text{et} \\ 0 & \text{si } \pi\leq t\leq 2\pi \end{cases}$$

1- Valeur moyenne du signal

C'est le réel a_0 défini par : $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(\omega t)d(\omega t)$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{V}{\pi}\omega t d(\omega t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}\omega t d(\omega t)+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}0d(\omega t)$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}\omega t d(\omega t)$ car $f(t)=0$ sur $[\pi, 2\pi]$ Posons $\omega t=u$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}u d(u)=\frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\pi}=\frac{V}{2}\Rightarrow a_0=\frac{V}{4}$$

2- Détermination de a_n

$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)d(\omega t)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}\omega t\cos(n\omega t)d(\omega t)+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}0d(\omega t)$$

$=\frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}\omega t\cos(n\omega t)d(\omega t)$. On pose $x=\omega t$ (car ωt étant une variable muette) et on obtient

$a_n=\frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx$ Posons à nouveau $v=x \Rightarrow v'=1$

Et $w'=\cos(nx) \Longrightarrow \quad w=\frac{1}{n}\sin(nx)$

D'où $a_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\{[x\times\frac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\{[x\times\frac{1}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{V}{2n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)$$

Donc $a_n = \frac{V}{2n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)$

3- **Détermination de b_n**

On sait que $b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)d(\omega t)$

Par le même raisonnement on a :

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}\omega t\sin(n\omega t)d(\omega t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0d(\omega t)$$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}\omega t\sin(n\omega t)d(\omega t)$ En posant toujours $x=\omega t$

On a : $b_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$ soit $u = x \Longrightarrow u' = 1$

Et $v'=\sin(nx) \Longrightarrow v=-\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}\{[-x\frac{1}{n}\cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{V}{\pi}[-x\frac{1}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)]_0^{\pi} = -\frac{V}{2n\pi}\cos(n\pi)$$

Donc $\boxed{b_n = -\frac{V}{2n\pi}\cos(n\pi)}$

4- **Donnons la fonction $u(t)$ définie par :**

$U(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(\omega t) + \ldots\ldots + b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + b_3\sin(\omega t) + \ldots\ldots$

$a_1 = \frac{-V}{\pi^2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = \frac{-V}{9\pi^2}$ et $b_1 = \frac{V}{2\pi}$ $b_2 = -\frac{V}{4\pi}$ et $b_3 = \frac{V}{6\pi}$

D'où l'expression cherchée est :

$U(t) = \frac{V}{8} + \frac{-V}{\pi^2}\cos(\omega t) - \frac{V}{9\pi^2}\cos(\omega t) + \ldots\ldots + \frac{V}{2\pi}\sin(\omega t) - \frac{V}{4\pi}\sin(2\omega t) + \frac{V}{6\pi}\sin(\omega t) + \ldots\ldots$

5- **Amplitude des différents harmoniques**

On en distingue les amplitudes des harmoniques paires et les harmoniques impaires

- Les amplitudes des harmoniques paires sont les différentes valeurs de b_n

  Soit : $b_1 = \frac{V}{2\pi}$; $b_2 = -\frac{V}{4\pi}$; $b_3 = \frac{V}{6\pi}$..........
- Les amplitudes des harmoniques impaires sont cependant les coefficientsc_n définies par :

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

<u>EXERCICE 5:</u>

Résolution des équations dans $\mathbb{R}$

1- $\sqrt{2x^2 + 5x + 4} = 2 - x$

Contrainte sur x :

- $2x^2 + 5x + 4 \geq 0$or Δ=25-4(8)< 0 on déduit que pour tout réel x, $2x^2 + 5x + 4 > 0$
- $2 - x > 0 \Longrightarrow x \in]-\infty; 2[$

Ainsi $\sqrt{2x^2 + 5x + 4} = 2 - x \Longrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = (2 - x)^2$

$\Longrightarrow x^2 + 9x = 0$ Donc x=0 ou x=-9

D'où $S = \{0; -9\}$

2- $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

$$\Longrightarrow (\sin^2 x)^3 + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

$$\Longrightarrow (1 - \cos^2 x)^3 + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

$\Longrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{3}{16} = 0$ Posons X=$\cos^2 x$ l'équation devient

$X^2 - X + \frac{3}{16} = 0$ Les solutions de cette dernière sont $X_1 = \frac{1}{4}$ et $X_2 = \frac{3}{4}$

Et par remplacement, on a $\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right)\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) = 0$

Soit$\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ou $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

D'où$S=\{=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,;=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ k\in\mathbb{Z}\}$

3- $e^x-2e^{-x}=1$

On a : $e^x-2e^{-x}=1\Rightarrow e^x-\frac{2}{e^x}=1\Rightarrow e^{2x}-2=e^x$

Soit en définitive : $e^{2x}+e^x-2=0$ (1)

Posons $X=e^x$ l'équation (1) devient $X^2+X-2=0$ soit $X_1=2$ et $X_2=-1$

Il vient donc que :

$$e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$$

$e^x=-1$ N'a pas de sens car $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x>0$

D'où$S=\{\ln 2\}$

4- $3^{x-2}=8$

$$3^{x-2}=8\Rightarrow \ln(3^{x-2})=\ln 8\Rightarrow (x-2)\ln 3=\ln 8\Rightarrow x=\frac{\ln 8}{\ln 2}+2$$

Donc $S=\{\frac{\ln 8}{\ln 2}+2\}$

5- $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 12$

Contrainte sur x

L'équation ci-haut a un sens si : $\begin{cases}x-2>0\\ \text{et}\\ x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ \text{et}\\ x>-2\end{cases}$ donc $D_E=]2;+\infty[$ (domaine d'étude)

6- Ainsi : $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 12\Rightarrow \ln[(x-2)(x+2)]=\ln 12$

$\Rightarrow(x-2)(x+2)=12\Rightarrow x^2-16=0$ donc x=4 ou x=-4

Or -4 n'est pas dans le domaine d'étude d'où $S=\{4\}$

<u>EXERCICE 6</u> :

Etude de la fonction $f: x\longrightarrow x2^x$

1- **Etude de la continuité de la fonction f**

f peut aussi se mettre sous la forme $f(x) = xe^{x\ln 2}$. On voit donc que la fonction $x \longmapsto x$ [illegible] est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et la fonction $x \longrightarrow e^{x\ln 2}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction exponentielle. On conclut donc que f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2- Calcul des limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{x\ln 2}) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{x\ln 2}) = 0$$

La droite d'équation y=0 est asymptote à la courbe de f en $-\infty$

3- Tableau de variation de f

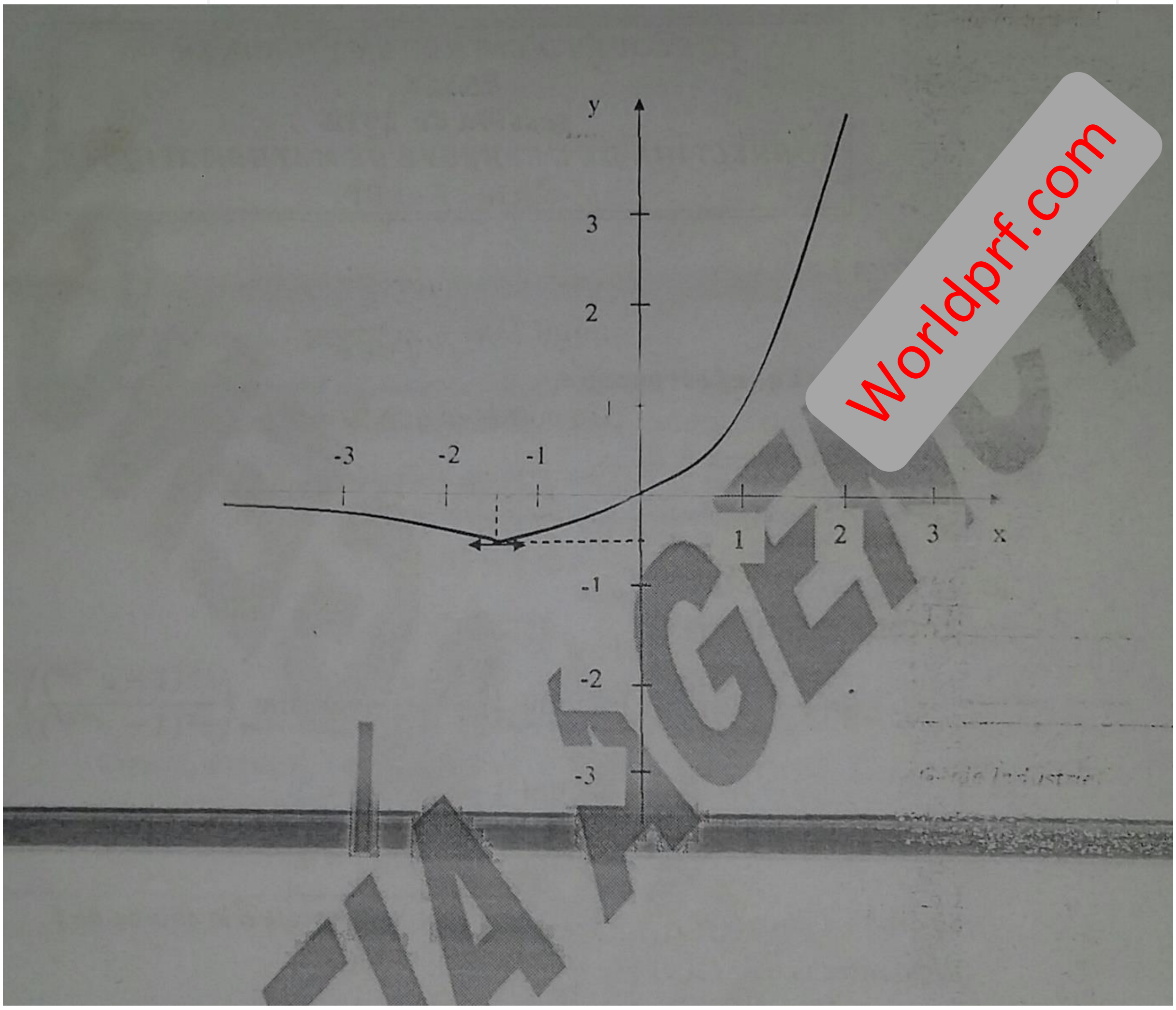
La fonction f est le produit de fonction continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = (xe^{x\ln 2})' = e^{x\ln 2} + x\ln 2 e^{x\ln 2} = (1 + x\ln 2)e^{x\ln 2}$$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend de 1+xln2. On en déduit la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1/\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-1/e\ln 2$	↗	$+\infty$

4- Courbe représentative de la fonction f


y
3
2
1
-3
-2
-1
1
2
3
x
-1
-2
-3