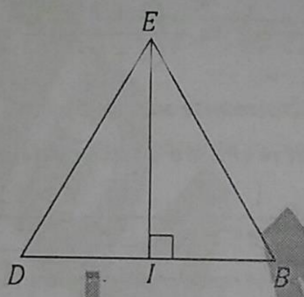
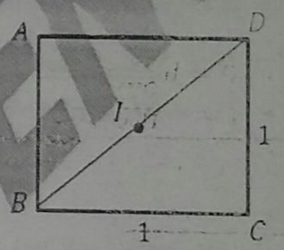
CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE
ENSET
session de 2019
CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : F et BT

Exercice 1 :

1-a/ Montrons que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$





On a : $IE^2 = DE^2 - DI^2$ (Propriété de Pythagore)

or $DI = \frac{DB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $DB = \sqrt{2}$

Il vient donc que : $IE^2 = DE^2 - DI^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$ donc $\boxed{IE = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

b/ Montrons que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE)

c/ Equation cartésienne du plan (ABE)

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal, l'équation du plan (ABE) est de la forme :

$$(ABE) : -2y + \sqrt{2}z + d = 0 \quad \text{or} \quad A(0,0,0) \in (ABE) \Rightarrow d = 0$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{(ABE) : -2y + \sqrt{2}z = 0}$$

Exercice 3 :

Partie A

1/ Etudions le sens de variation de la fonction f

- Domaine de définition

$$D_f = [0;1]$$

- Limites aux bornes du domaine de définition

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+e^{1-x}}\right) = \frac{1}{1+e}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+e^{1-1}}\right) = \frac{1}{2}$$

- Dérivée et sens de variation

La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ et on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+e^{1-x}}\right)' = -\frac{(1+e^{1-x})'}{(1+e^{1-x})^2} = \frac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2} > 0$$

Conclusion : la fonction f est croissante sur $[0;1]$

2/ Démontrons que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+e}$

$$On\ a : f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}} = \frac{1}{1+\frac{e}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x+e}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+e}$$

$$donc\ \boxed{f(x) = \frac{e^x}{e^x+e}}$$

3// Montrons que $\int_0^1 f(x)dx = ln2 + 1 - \ln(1+e)$

$$On\ a : \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(\frac{e^x}{e^x+e}\right)dx = [\ln(e^x+e)]_0^1 = ln2e - \ln(1+e)$$

$$= ln2 + lne - \ln(1+e) = ln2 + 1 - \ln(1+e)$$

$$donc\ \boxed{\int_0^1 f(x)dx = ln2 + 1 - \ln(1+e)}$$

Partie B :

1/ Tracé de la courbe (C_0)

NB : A faire par l'apprenant

2/ Interprétation graphique de u_n et valeur de u_0

interprétation : u_n est le domaine plan délimité par la courbe (C_n), l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

$$par\ ailleurs, u_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

3/ Sens de variation de u_n

De la conjecture, on peut dire que la suite (u_n) est décroissante

Preuve :

$$On\ a:\ (n+1)e^{1-x} \geq ne^{1-x} \Rightarrow 1+(n+1)e^{1-x} \geq 1+ne^{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} \leq \frac{1}{1+ne^{1-x}}\ ie\ \frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1+ne^{1-x}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1+ne^{1-x}}\right) dx \leq 0$$

$$ie\ \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}}\right) dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{1+ne^{1-x}}\right) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}}\right) dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1+ne^{1-x}}\right) dx$$

$$et\ donc\ u_{n+1} \leq u_n$$

Conclusion : La suite (u_n) est donc décroissante

4/ La suite (u_n) est décroissante et bornée, elle est donc convergente

EXERCICE 4 :

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

c) Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$

$$On\ a:\ u_n = z_n - z_A \Rightarrow u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i = \frac{1}{2} i(z_n - 2i - 4) = \frac{1}{2} i(z_n - z_A) = \frac{1}{2} i \times u_n$$

$$donc\ \boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n}$$

b/ Démontrons que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

On peut constater que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $u_0 = z_0 - z_A = -4 - 2i$. Il vient donc que :

$$u_n = u_0 q^n = (-4-2i)\left(\frac{1}{2} i\right)^n$$

$$\text{donc } \boxed{u_n = (-4-2i)\left(\frac{1}{2}i\right)^n}$$

2/ Démontrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

$$On\ a : \quad Z_{\overrightarrow{AM_n}} = z_n - z_A = u_n \qquad (i)$$

$$Par\ ailleurs, \quad Z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = z_{n+4} - z_A = \frac{1}{2}iz_{n+3} + 5 - z_A$$

$$\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}iz_{n+2} + 5\right) + 5 - z_A = -\frac{1}{4}z_{n+2} + \frac{5}{2}i + 5 - 4 - 2i$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}iz_{n+1} + 5\right) + \frac{1}{2}i + 1 = -\frac{1}{8}iz_{n+1} - \frac{5}{4} + 1 + \frac{1}{2}i$$

$$= -\frac{1}{8}i\left(\frac{1}{2}iz_n + 5\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{16}z_n - \frac{5}{8}i + \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16}z_n - \frac{1}{8}i - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}(z_n - 4 - 2i) = \frac{1}{16}(z_n - z_A) = \frac{1}{16}u_n$$

$$On\ a\ donc\ \ Z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = \frac{1}{16}u_n \qquad (ii)$$

$$de\ (i)\ et\ (ii)\ on\ a : \ Z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = \frac{1}{16}Z_{\overrightarrow{AM_n}} \Rightarrow \overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$$

Conclusion : les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.