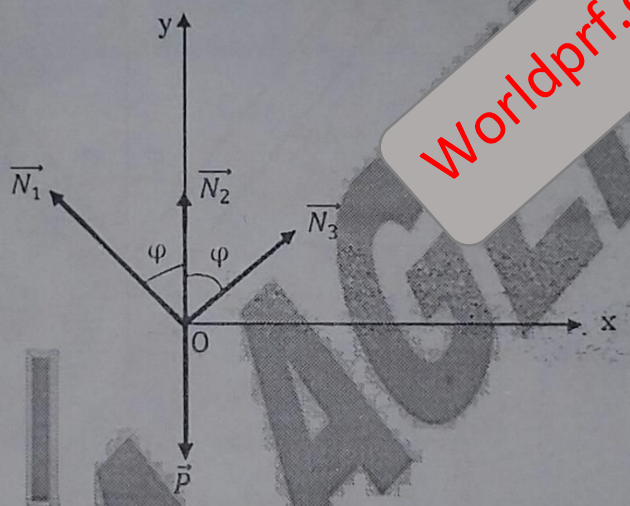
CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE
ENSET
session de 2013
CORRECTION DE L'EPREUVE DE SPECIALITE
Série : F1, MF, CH, CM, MA

Exercice 1 :



1) Etudions l'équilibre de l'axe O et montrons que le système est hyperstatique

O est en équilibre si :

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = \vec{0} & (1) \\ \sum \mathcal{M}_0(\vec{F}_{Ext}) = 0 & (2) \end{cases}$$

Comme tous les efforts extérieurs se rencontrent en O, on a à nouveau :

$\sum \mathcal{M}_0(\vec{F}_{Ext}) = 0$

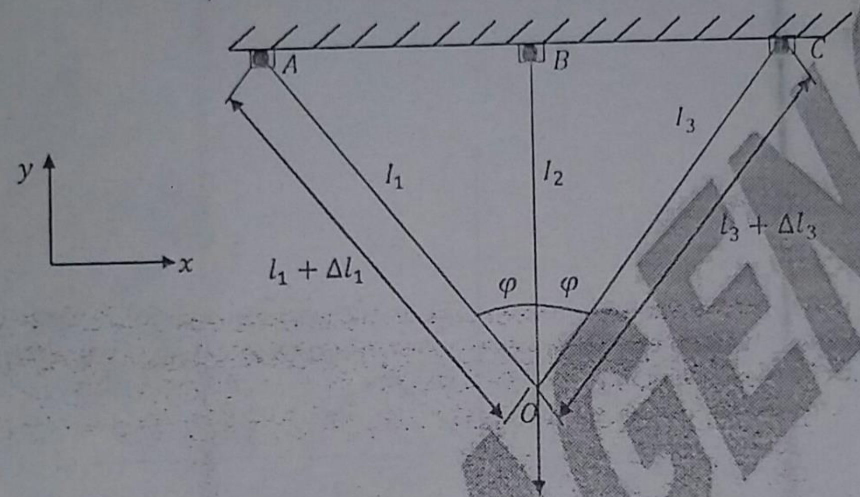
En projetant la relation (1) sur les axes on a :

$$\begin{cases} suivant\ (OX):\ N_3 sin\varphi - N_1 sin\varphi = 0 \implies N_1 = N_3 \\ suivant\ (OY):\ -P + N_1 cos\varphi + N_2 + N_3 cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} N_1 = N_3 & (1) \\ N_1 cos\varphi + N_2 + N_3 cos\varphi = P & (2) \end{cases}$$

On trouve donc un système de deux équations à trois inconnues le système est donc hyperstatique.

2) Exprimons la relation entre les allongements des trois barres. On négligera la variation de φ



$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2 + \Delta l_2}{l_1 + \Delta l_1}$$

$$\Rightarrow l_2(l_1 + \Delta l_1) = l_1(l_2 + \Delta l_2)$$

$$\Rightarrow l_2 \Delta l_1 = l_1 \Delta l_2$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \cos\varphi$$

$$\boxed{\begin{cases} \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\varphi \\ \Delta l_1 = \cos\varphi \end{cases}}$$

3) Exprimons les efforts normaux dans les barres.

$$(1)\ dans\ (3) \Leftrightarrow 2N_1\cos\varphi + N_2 = P \quad (3)$$

$$Barre\ AO : \frac{N_1}{S} = E\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} \Rightarrow \frac{N_1 l_1}{\Delta l_1} = ES$$

$$Barre\ BO : \frac{N_2 l_2}{\Delta l_2} = ES$$

$$Barre\ CO : \frac{N_3 l_3}{\Delta l_3} = ES$$

$$\Rightarrow \frac{N_1 l_1}{\Delta l_1} = \frac{N_2 l_2}{\Delta l_2} = \frac{N_3 l_3}{\Delta l_3} = ES$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 cos\varphi \quad et \quad \Delta l_1 = \Delta l_3$$

$$\frac{N_1 l_1}{\Delta l_1} = \frac{N_2 l_2}{\Delta l_2} \Rightarrow \frac{N_1 l_1}{\Delta l_1} = \frac{N_2 l_2}{\Delta l_1 cos\varphi}$$

$$\Rightarrow N_1 l_1 = \frac{N_2 l_2}{cos\varphi} \Rightarrow N_1 l_1 \, cos\varphi = N_2 l_2$$

$$(3) \Rightarrow 2N_1 cos\varphi + N_2 = P$$

$$\begin{cases} N_1 l_1 cos\varphi = N_2 l_2 & (a) \\ 2N_1 cos\varphi + N_2 = P & (b) \end{cases}$$

$$l_2 \times (b) + (a) \Rightarrow N_1 cos\varphi(l_1 + l_2) = P l_2$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = P\frac{l_2}{(l_1 + 2l_2)cos\varphi} = N_3}$$

$$\boxed{N_2 = P\frac{l_1}{(l_1 + 2l_2)cos\varphi}}$$

$Or \; cos\varphi = \frac{l_2}{l_1}$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{P}{(1 + 2cos\varphi)} = N_3}$$

$$\boxed{N_2 = \frac{P}{(1 + 2cos\varphi)cos\varphi}}$$

$$AN: N_1 = N_3 = \frac{6000}{1 + 2cos30°} = 2196{,}15\ N$$

$$\boxed{N_1 = N_3 = 2196{,}15\ N}$$

$$\boxed{N_2 = 2535{,}89\ N}$$

4) On donne : $S = mm^2, \|\vec{P}\| = 6000N, \varphi = 30°$. Calculons les contraintes d'extension dans les trois

Dans la barre AO:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S} \quad AN:\ \sigma_1 = \frac{2196{,}15}{1} = 2196{,}15\ N/mm^2$$

$$Donc\ \boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = 2196{,}15\ N/mm^2}$$

Partie III : RESISTANCE DES MATERIAUX

D : diamètre d'enroulement de l'hélice moyenne

D : diamètre du fil

n : nombre de spires utiles

Cahier des charges :

5- Le ressort doit être guidé dans un tube de $\phi 52mm$

6- Charge maximale en fonctionnement normal : $P_{max} = 500N$

7- Rigidité approximative : $k \approx 18\ N/mm$

8- Caractéristiques de l'acier de construction utilisé :

$$G = 84.10^3 Mpa\ ;\ \tau_e = 600MPa;\ \tau_p = 400MPa$$

- **Condition d'encombrement :**

  Pour assurer une certaine liberté dans le tube de $\phi 52mm$, nous prendrons $D + d \approx 50$ (1)

- **Condition de résistance pratique :**

$$\tau_{max} \leq \tau_p \quad avec \quad \tau_{max} = \frac{8P_{max}D}{\pi d^3}$$

$$soit\ 10D \leq \pi d^3 \quad (2)$$

- **Condition de déformation**

$$f = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad avec \quad P = kf \quad \Rightarrow \quad k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

$$Soit\ 12D^3n = 7 \times 10^3 \times d^4 \quad (3)$$

Le système (1) et (2) permet la détermination des inconnus D et d. Le calcul doit nécessairement commencer par d car c'est un nombre normal. Après élimination de D, on obtient :

$$\pi d^3 + 10d - 500 \geq 0$$

Pour résoudre une telle inéquation, on peut utiliser une méthode graphique, on peut également utiliser un programme ou alors procéder par des approximations successives.

Méthodes par approximation successives:

Notons : $f(d) = \pi d^3 + 10d - 500$

$$f'(d) = 3\pi d^2 + 10 > 0$$

f est continue et croissante donc admet une seule racine réelle.

Si $f(a) \times f(b) < 0 \Rightarrow a < d < b$ *ainsi donc on a :*

$$\begin{cases} f(5) = -57{,}3 \\ f(6) = 238{,}58 \end{cases} \Rightarrow 5 < d < 6$$

$$f(5{,}5) = 77{,}68 \Rightarrow 5 < d < 5{,}5$$

$$f(5{,}2) = -6{,}26 \Rightarrow 5{,}2 < d < 5{,}5$$

On prendra le nombre normal :

$$Donc\ \boxed{D = 5{,}5\ mm}$$

$$par\ ailleurs, \quad D + d \approx 50 \Rightarrow \boxed{D \approx 44{,}5\ mm}$$

$$n = 6{,}057$$

La rigidité k étant approximative dans le but de simplifier les résultats. On prend $\boxed{n = 6\ spires}$.

Exercice 2 :

1- Déterminons D :

a) A partir de la condition de résistance

$$k\tau_{max} \leq \frac{\tau_e}{S} = \tau_P$$

$$\tau_{max} = \frac{\mathcal{M}_{t_{max}}}{I_0}\frac{D}{2} \quad avec\ I_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$\frac{16(\mathcal{M}_{t_{max}})k}{\pi\left(D^3 - \frac{d^4}{D}\right)} \leq \frac{\tau_e}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{k16\mathcal{M}_{t_{max}}}{\pi\frac{\tau_e}{S}} \leq D^3 - \frac{d^4}{D}$$

$$130\pi(D^4 - 20^4) - 3 \times 16 \times 1{,}7 \times 5 \times 10^4 D \geq 0$$

Notons :

$$f(D) = 408{,}4D^4 - 408.10^4 D - 6534{,}5127.10^4$$

$$donnons\ à\ D\ difffférentes\ valeurs\ a; b$$

$$si\ f(a).fb) < 0, alors\ a < D < b$$

$d = 20\ mm$ justifie le choix de départ

$$a = 24; b = 26 \text{ comme valeur de départ de calcul}$$

$$\begin{cases} f(24) = -2.77 \times 10^7 \\ f(26) = 1{,}5.10^7 \end{cases} \Rightarrow 24 < D < 26$$

b) A partir de la condition de rigidité

Le type de construction nécessite une construction de $0{,}5°/m$

Condition de rigidité

$$\theta_{max} \le \theta_{limite} = 0{,}5.\frac{10}{180} \times \frac{1}{10^3}$$

$$\theta_{max} = \frac{\mathcal{M}_t}{GI_0};\ \theta_{limite} = 8{,}7266.10^{-6}\ rad/mm$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{M}_t}{GI_0} \le \frac{\alpha_{limite}}{l} = \theta_{limite}$$

$$\frac{32}{\pi}\frac{\mathcal{M}_t}{G \times \theta_{limite}} \le D^4 - d^4$$

$$\Rightarrow \boxed{D \ge \sqrt[4]{d^4 + \frac{32}{\pi}\frac{\mathcal{M}_t}{G \times \theta_{limite}}}}$$

$$AN:\ D \ge 30{,}7\ mm$$

2- Déterminons la valeur de la déformation entre les deux sections A et B (α_{AB}).

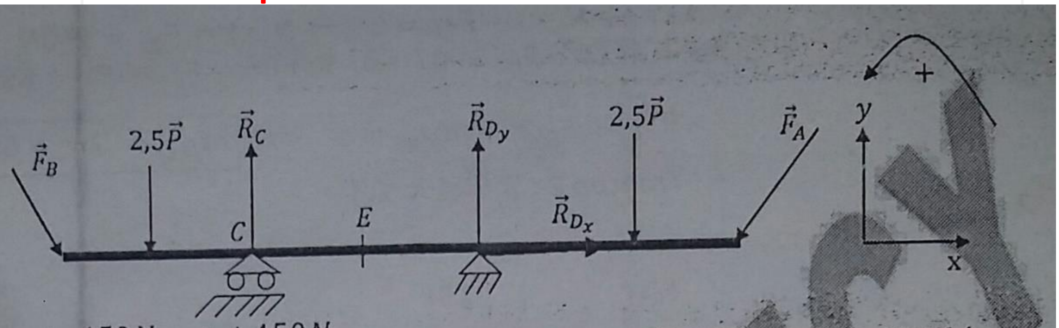
$$\boxed{\alpha_{AB} = \frac{\mathcal{M}_t}{GI_0}} \quad avec\ \mathcal{M}_t = G\theta I_0$$

$$AN:\ \alpha_{AB} = \frac{5.10^4 \times 600 \times 32}{8 \times 10^4 \times \pi(30{,}7^4 - 20^4)} = 5{,}245 \times 10^{-3}\ rad$$

$$\boxed{\alpha_{AB} = 0{,}3°}$$

__Exercice 3 :__

9- Calculons les réactions aux appuis C et D.



$\vec{F}_A \left| \begin{matrix} -450N \\ -650N \end{matrix} \right.$ $\vec{F}_B \left| \begin{matrix} 450N \\ -650N \end{matrix} \right.$ $d = 12\ mm;\ \sigma_e = 150\ MPa\ ;\ P = 10\ N/m$

La poutre est en équilibre si :

$$\vec{F}_B + \vec{F}_A + 2{,}5\vec{P} + \vec{R}_C + \vec{R}_D + 2{,}5\vec{P} = \vec{0} \quad et \quad \sum \mathcal{M}_E(\vec{F}_{Ext}) = \vec{0}$$

- Suivant l'axe (OX) : $F_{Ax} + F_{Bx} + R_{Dx} = 0 \Longrightarrow$

$$\boxed{R_{Dx} = -F_{Ax} - F_{Bx}}$$

$$AN:\ R_{Dx} = -450 + 450 = 0$$

$$Donc\ \boxed{R_{Dx} = 0}$$

- Suivant l'axe (OY) :

$$F_{By} - 2{,}5P + R_C + R_{Dy} - 2{,}5P + F_{Ay} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_C + R_{Dy} = 5P - F_{By} - F_{Ay}}$$

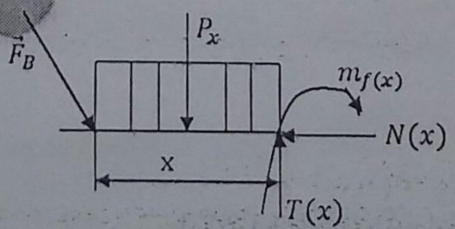
$$\sum \mathcal{M}_E(\vec{F}_{Ext}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad R_C = R_{Dy}$$

$$D'où\ \boxed{R_C = R_{Dy} = \frac{1}{2}\left(5P - F_{By} - F_{Ay}\right)}$$

$$AN:\ \boxed{R_C = R_{Dy} = 675N}$$

10- **Traçons les courbes de $|N(x)|$; $|T(x)|$; et $|mf_z(x)|$**

- **Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 2\pi$**

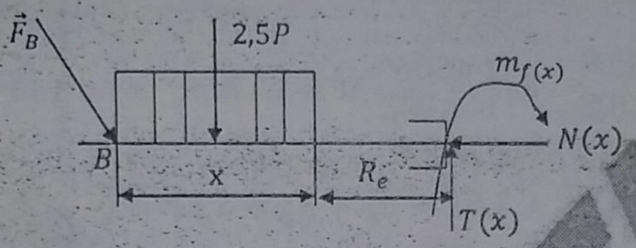


$$-N(x) + F_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow N(x) = F_{Bx} = 450N$$

$$-Px + T(x) + F_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = -F_{By} + Px = 650 + 10x$$

$$-P\frac{x^2}{2} + F_{By}x + m_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{f(x)} = 5x^2 + 650x}$$

- **Tronçon 2 : $2,5 \le x \le 4$**



$$-N(x) + F_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = F_{Bx} = 450N$$

$$T(x) + F_{By} + R_C - 2,5P = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = 2,5P - R_C - F_{By}$$

$$\Rightarrow \quad T(x) = 25 - 675 + 650 = 0$$

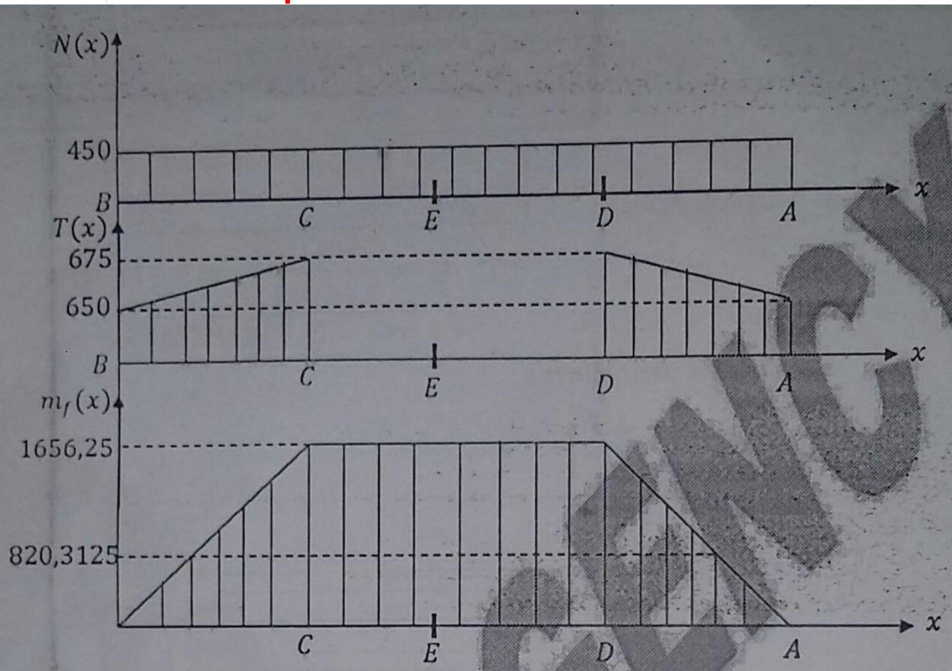
$$T(x) = 0$$

$$m_f(x) + (x - 2,5)R_C - \left(x - \frac{2,5}{2}\right) \times 2,5P + F_{By}x = 0$$

$$m_f(x) = (x - 1,25) \times 2,5P - F_{By}x + (2,5 - x)R_C$$

$$AN: \boxed{m_f(x) = 1656,25}$$

Le chargement étant symétrique par rapport à E, alors les efforts restent identiques dans la portion [EA]



11- Déduisons $|N(x)|_{max}$; $|T(x)|_{max}$ et $|mf_z(x)|_{max}$

$|N(x)|_{max} = 450N$; $|T(x)|_{max} = 675\ N$; $|mf_z(x)|_{max} = 1656,25\ N.m$

12- Déduisons $|N(x)|_{max}$; $|T(x)|_{max}$ et $|mf_z(x)|_{max}$ à $x = 5m$

$|N(x)|_{max} = 450N$; $|T(x)|_{max} = 675\ N$; $|mf_z(x)|_{max} = 1656,25\ N.m$

13- *Calculons les contraintes maximales et fléchissant (resp. σ_1, σ_2 et σ_T) à $x = 5m$ et traçons la répartition des contraintes correspondantes*

On a: $\sigma_1 = \dfrac{|N(x)|_{max}}{S}$ or $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = \dfrac{|N(x)|_{max} \times 4}{\pi d^2}}$

AN : $\sigma_1 = \dfrac{4 \times 450}{3,14 \times 12^2} = 3,98\ MPa$ Donc $\boxed{\sigma_1 = 3,98\ MPa}$

Par ailleurs, $\sigma_2 = \dfrac{|mf_z(x)|_{max}}{I}\left(\dfrac{d}{2}\right)$ or $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$

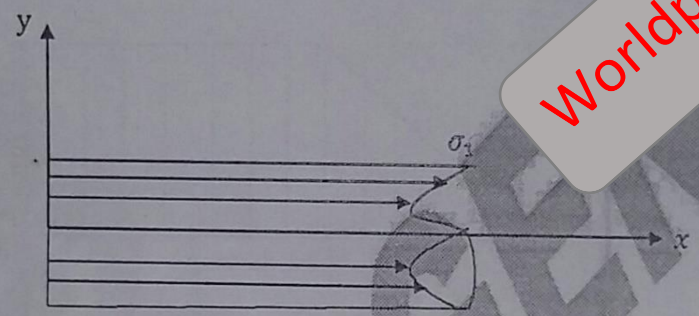
Donc $\boxed{\sigma_2 = \frac{32 \times |mf_z(x)|_{max}}{\pi d^3}}$ AN: $\boxed{\sigma_2 = 9,76\ MPa}$

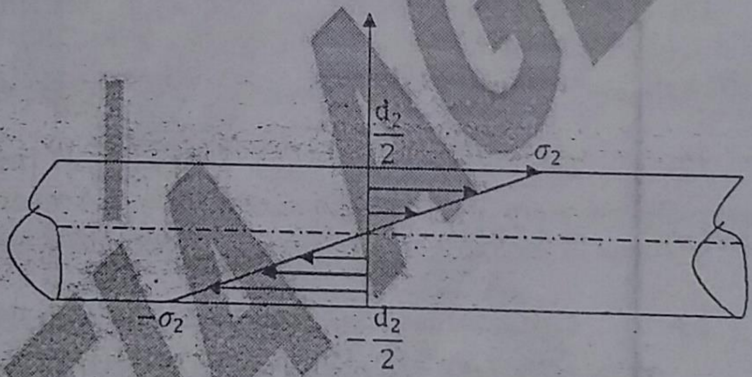
$$\boxed{\sigma_T = \frac{|T(x)|_{max}}{S} = \frac{4 \times |T(x)|_{max}}{\pi d^4}}$$

$$AN:\ \sigma_T = \frac{4 \times 675}{3,14 \times 12^2} = 5,971\ MPa$$

$$\boxed{\sigma_T = 5,971\ MPa}$$

Tracé des contraintes





14- Vérifions que la poutre résiste.

La poutre résiste si $\frac{|N(x)|_{max}}{S} + \frac{|mf_z(x)|_{max}}{I}\left(\frac{d}{2}\right) \leq \frac{\sigma_e}{s}$

$$ie\ \ \sigma_1 + \sigma_2 \leq \frac{\sigma_e}{S}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 13,74\ MPa \quad or \quad \frac{\sigma_e}{S} = 50MPa$$

Donc la poutre résiste

15- Déterminons la valeur de y' en A. Et déduisons l'angle φ_A de la déformée en A

$$EIy'' = -\mathcal{M}_f(x) \implies \begin{cases} x \in [0;2{,}5] \ , \ EIy'' = -5x^2 - 650x \\ x \in [2{,}5;4], \ EIy'' = -165{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIy' = -\dfrac{5}{3}x^3 - 325x^2 + c_1 \ , & x \in [0;2{,}5] \\ EIy' = -1656{,}25x + c_2, & x \in [2{,}5;4] \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -\dfrac{5}{12}x^4 - \dfrac{325}{3}x^3 + c_1x + c_3 \ , & 0 \leq x \leq 2{,}5 \\ EIy = -\dfrac{1656{,}25}{2}x^2 + c_2x + c_4 \ , & 2{,}5 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$y_c = y(2{,}5) = 0$$

$$\implies EIy'(x_A) = EIy'(x_B) = -\frac{5}{3}x_B^3 - 325x_B^2 + c_1$$

$$\implies \boxed{\varphi_A = \frac{\mathbf{1}}{y_A}}$$