Corrigé du sujet du Concours d'entrée en première année du cycle Licence session de janvier 2018 (ENSP CONGO).

NB : Dans la question 5) c) de l'exercice N°3, il y a une petite erreur de saisie.

Ça devrait être f est continue et strictement décroissante sur]-∞ ; + ∞[. Elle réalise une bijection de]-∞ ; +∞[vers f(]-∞; +∞[) ou bien vers]0; +∞[. Elle admet par conséquent une bijection réciproque notée f(-1) de]0; +∞[vers f(]0;+∞[) ou bien vers]-∞; +∞[.

UNIVERSITE MARIEN NGOUABI

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

Concours d'entrée en première année du cycle de Licence
Session de Janvier 2018

Epreuve de Mathématiques (Séries C,D,E)
Durée : 3H
Cœff. : 1

Document autorisés : calculatrice non programmable.

EXERCICE N°1 : (06 points)

Soit a et b deux réels. On considère le nombre complexe Z défini tel que :

$$Z = \frac{a+ib}{1-i}$$

i Étant un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$

1) Déterminer les deux réels a et b tels que le nombre complexe Z ait pour module $2\sqrt{2}$ et un de ses arguments est $\frac{3\pi}{4}$ (1pt)

2) On pose $Z = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$
   a) Ecrire le nombre complexe Z sous la forme algébrique : $Z = \alpha + i\beta$ (1pt)
   b) Déduire le module et un argument du nombre complexe Z^6 (1pt)

3) On pose a=0 et b=4
   a) Calcule le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{4i}{1-i}$
   b) Le plan complexe C étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit A le point d'affixe Z, placer le point A dans ce repère indiqué. Unité graphique 2cm.

06

EXERCICE N° 2 : (6 points)

Le plan E est rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs, $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ définis d[...] la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E

1) Prouver que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. (1pt)

2) Ecrire le vecteur $\vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (1pt)

3) Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ par $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$
   a) Calculer $f \circ f(\vec{u})$ et $f \circ f(\vec{v})$ (1pt)
   b) Déduire la nature de l'endomorphisme f de E. (1pt)
   c) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E. (1pt)

08

EXERCICE N° 3 : (8 points)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ direct du [...]
Unité graphique 2cm.

1) Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (0,5pt)
2) Montrer que la fonction f peut encore s'écrire $f(x) = -x + \ln(1 + e^{x})$ (0,5pt)
3) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (1pt)
4) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f (0,5pt)
   b) Dresser le tableau de variations de f (1pt)

5) a) Etudier les branches infinies à la courbe (C) de f. (1pt)
   b) Tracer (C). (0,5pt)
   c) Montrer que la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on dressera de variations. (0,5pt)
   d) Tracer la courbe (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère que (C) de f (0,5pt)

BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE
(BCA)
" LE REVEIL DE LA CULTURE AFRICAINE "

REPUBLIQUE DU CONGO
Unité*Travail*Progrès

Tél ou whatsapp : +242 06 713 32 41 / 06 741 73 10

Facebook : Bureau du Centre Académique - BCA

Concours d'entrée en première année du cycle de Licence
Session de janvier 2018
Université : MARIEN NGOUABI

Epreuve de Mathématiques (Séries C, D, E)

Durée : 3

Coefficient : 3

Proposition de corrigé par l'équipe du BCA

EXERCICE N°1 :

1) Déterminons les deux réels a et b tels que le nombre complexe Z ait pour module 2 et ses arguments $\frac{3\pi}{4}$.

Soit $Z = \frac{a+ib}{1-i} = \frac{(a+ib)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(a-b)+i(a+b)}{1+i-i+1} = \frac{(a-b)+i(a+b)}{2}$ or $Z = \left[2\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow \frac{(a-b)+i(a+b)}{2} = \left[2\,;\,\frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \frac{(a-b)}{2} + i\frac{(a+b)}{2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Par comparaison on a : $\begin{cases} \frac{(a-b)}{2} = 2\cos\frac{3\pi}{4} \\ i\frac{(a+b)}{2} = 2i\sin\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(a-b)}{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \frac{(a+b)}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = -2\sqrt{2} \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \ 2a = 0$

Soit $a = 0 \implies 0 + b = 2\sqrt{2} \implies b = 2\sqrt{2}$

D'où $\boxed{a = 0 \text{ et } b = 2\sqrt{2}}$

2) On pose $Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

a) Ecrivons le nombre complexe Z sous la forme algébrique

Soit $Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{\implies Z = -2 + 2i}$

b) Déduisons le module et un argument du nombre complexe Z^6

Soit $Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \implies Z^6 = \left(2\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} \times 6\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} \times 6\right)\right)$

$= 512\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$

$\boxed{\implies |Z^6| = 512 \text{ et } arg(Z^6) = \frac{9\pi}{2}[2\pi]}$

3) On pose $a = 0$ et $b = 4$.

a) Calculons le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{4i}{1-i}$.

Soit $|Z| = \left|\frac{4i}{1-i}\right| = \frac{|4i|}{|1-i|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} \implies \boxed{|Z| = 2\sqrt{2}}$ et

$arg(Z) = arg\left(\frac{4i}{1-i}\right) = arg(4i) - arg(1-i) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \implies \boxed{arg(Z) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]}$

b) Facile à faire.

EXERCICE N°2 :

1) La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E si et seulement si son déterminant est non nul

Alors on a : $det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times (-2) = 1 + 2 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la famille } (\vec{u},\vec{v}) \text{ est bien une base de } E}$

2) Ecrivons le vecteur $\vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

Soit le système d'équations : $\begin{cases} \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{u} \ (1) \\ \vec{i} + \vec{j} = \vec{v} \ (2) \end{cases}_{\times(2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{u} \\ 2\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} \ (3)$

Remplaçons (3) dans (2) , on obtient :

$$\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}\right) + \vec{j} = \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} \Rightarrow \vec{j} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

D'où on a $\vec{w} = 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right)$

$= (1+1)\vec{u} + (2-1)\vec{v}$

$\boxed{\Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}}$

3) a) Calculons $fof(\vec{u})$ et $fof(\vec{v})$

Soit $fof(\vec{u}) = f[f(\vec{u})]$

$= f(\vec{u})$

$\boxed{\Rightarrow fof(\vec{u}) = \vec{u}}$

Soit $fof(\vec{v}) = f[f(\vec{v})]$

$= f(-\vec{v})$

$= -f(\vec{v})$

$\boxed{\Rightarrow fof(\vec{v}) = \vec{v}, \ car \ f(\vec{v}) = -\vec{v}.}$

b) Nature de l'endomorphisme de f

Comme $\begin{cases} fof(\vec{u}) = \vec{u} \\ fof(\vec{v}) = \vec{v} \end{cases}$ c'est-à-dire $fof = Id_E$, alors f est une symétrie vectorielle.

c) Matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de E

Soit : $\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = -v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \\ f(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} \underset{\times(-1)}{\Rightarrow} \begin{cases} f(\vec{\imath}) - 2f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} & (1) \\ f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow -3f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \Rightarrow f(\vec{\jmath}) = -\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}.$$

D'après (2), on a: $f(\vec{\imath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} - f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} = \left(-1 + \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)\vec{\jmath}$

$\Rightarrow f(\vec{\imath}) = -\frac{1}{3}\vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{\jmath}$

D'où la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de E est définie par : $\boxed{M_{f(\vec{\imath};\vec{\jmath})} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

EXERCICE N°3 :

1) Vérifions que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

$\forall\, x \in E_f$, f existe si et seulement si $1 + e^{-x} > 0$, c'est-à-dire $e^{-x} > -1$ tel que :

$\ln e^x > \ln(-1)$ (impossible).

D'où $\boxed{E_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[}$

2) Montrons que la fonction f peut encore s'écrire $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$.

$\forall\, x \in E_f$, $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$

$= \ln(1 + e^x) - \ln(e^x)$, car $(\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) = -x + \ln(1+e^x),\quad \forall\, x \in E_f,\ car\ \ \ln(e^a) = a\,.}$$

3) Calculons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x + \ln(1+e^x)$

$$= +\infty + \ln(1),\ car\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,\ \ car\ \ln(1) = 0}$$

Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + \ln(1+e^x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \ln(1),\ car\ (\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,)$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,\ \ car\ \ln(1) = 0}$$

4) a) Déterminons la fonction dérivée f' de f

$\forall\, x \in E_f,\ f(x) = u + v \ \Rightarrow\ f'(x) = u' + v'$

Avec $\begin{cases} u = -x\\ v = \ln(1+e^x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -1\\ v' = \frac{e^x}{1+e^x}\end{cases}$

$$\boxed{\text{Par conséquent } f'(x) = -1 + \frac{e^x}{1+e^x} \text{ ou bien } f'(x) = -\frac{1}{1+e^x},\ \forall\, x \in E_f}$$

b) Dressons le tableau de variations de f

* Signe de la dérivée f' de f'

$\forall\, x \in E_f,\ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variations de f est défini par :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

5) a) Etudions les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f

* Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (cas d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

* Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (possibilité d'une asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$).

Déterminons alors la valeur de a

Soit $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow$ a $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x+\ln(1+e^x)}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

$$= -1 + \ln(1) =, \; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, \; car \;\; \ln(1) = 0$$

Comme $a \;\exists$, déterminons alors la valeur de b

Soit $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] \Rightarrow b = \lim\limits_{x\to-\infty} [-x + \ln(1+e^x) + x]$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x), \; car \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$= \ln(1)$$

$$\Rightarrow b = 0, \; car \;\; \ln(1) = 0$$

Conclusion : Comme l'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$ où $a = -1$, $b = 0$.

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$ au voisinage de $+(\infty)$.

b) Traçons $(\mathcal{C})$ (Voir page 7).

c) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $f(]0\,;\,+\infty[)$. Elle admet par conséquent une bijection réciproque notée f^{-1} de $]0\,;\,+\infty[$ vers $f(\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[\,)$.

Son tableau de variations est défini par :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$-$
$f^{-1}(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

d) Traçons la courbe $(\mathcal{C}^{-1})$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$ de f