UNIVERSITÉ MARIEN NGOUABI

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

28

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE LICENCE

Session d'Octobre 2016

Epreuve de Mathématiques

Séries Baccalauréat C,D,E

Parcours-types :MI,GC,ET,EEP,GIA,CQA

Durée : 3h Coeff. : 2

LE CENTRE DES CONCOURS - LA CLÉ DE LA REUSSITE - LA DIRECTION

EXERCICE 1 (pts)

1) Résoudre dans C l'équation (E) définie par :(E) $Z^3 = 1$ (1,5pt)
On notera les solutions sous la forme algébrique $Z = a + ib$
2) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (E') telle que : (E') : $Z^3 = i^3$ (1,5pt)
3) Résoudre dans l'ensemble C l'équation (E ") : $(2Z + i)^3 - i^3 = 0$. (1,5pt)
4) Soit les nombres complexes (1,5pt)
$Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3i}{4}$ et $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3i}{4}$

Montrer que le nombre complexe $Z_3 = Z_1 + Z_2$ est imaginaire pur . (0,5pt)

EXERCICE 2 (pts)

Soit E un plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ on considère l'endomorphisme f de E défini dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par : $f(\vec{i}) = -\frac{1}{2}\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i}$

1) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
2) $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image de $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par f tel qu $f(\vec{u}) = \vec{u}$
   a) Exprimer les coordonnées x' et y' de $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées x e y de $\vec{u}$. (1pt)
   b) Calculer $f \circ f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j})$ (1pt)
   c) En déduire que f est une symétrie vectorielle de E
   d) Déterminer les éléments caractéristiques de f . (1pt)
3) a) soit les vecteurs $\vec{e_1} = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_2} = 2\vec{i} + \vec{j}$, montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une b de E (0,5pt)
   b) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. (0,5pt)

EXERCICE 3 (pts)

Partie A

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ (1pt)

2) En déduire la solution particulière f vérifiant les conditions ; $f(0) = 0$ e
$f'(o) = 2e$. (1pt)

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = 2xe^{1-x}$.

1) Démontrer que $f'(x) = 2e^{1-x}$ (1-x) . (0,5pt)

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (1pt)

3) Dresser le tableau de variation de f . (0,5pt)

4) Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = f(x) - 2x$.

   a) Etudier le signe de h(x) sur R .(0,5pt).

   b) En déduire que f(x)≥ $2x$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0
   . (0,5pt)

   .On désigne par (C) la courbe de f dans le plan (P) muni d'un re
   orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm

5) Construire la courbe (C) et la droite d'équation y = 2x . (1pt)

6) Calculer en cm^2 l'aire de l'ensemble des points M dont les coordo
   (x, y) vérifiant $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x \le y \le f(x) \end{cases}$ (1pt)

BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE
(BCA)
" LE REVEIL DE LA CULTURE AFRICAINE "

REPUBLIQUE DU CONGO
Unité*Travail*Progrès

Tél ou whatsapp : +242 06 713 32 41 / 06 741 73 10

Facebook : Bureau du Centre Académique - BCA

Concours d'entrée en première année du cycle de Licence
Session d'octobre 2016
Université : MARIEN NGOUABI

Epreuve de Mathématiques (Séries C, D, E)
Durée : 3 h
Coefficient : 2

Proposition de corrigé par l'équipe du BCA

EXERCICE N°1 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

$$z = [\rho;\ \alpha] \quad ; \quad z^3 = 1 \Leftrightarrow [\rho^3; 3\alpha] = [1;0] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\alpha = 0[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

tel que on a : $k \in \{0;1;2\}$ et $z_k = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

D'où les solutions de (E) sont telles que :

Pour la valeur $k = 0 \Longrightarrow z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = \boxed{1}$

Pour $k = 1 \Longrightarrow z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Pour $k = 2 \Rightarrow z_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$

2) Déduisons les solutions de (E')

Soit z une solution de l'équation (E). Alors $z^3 = 1$.

On en déduit que d'après $z'^3 = i^3$ on a : $\left(\frac{z'}{i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1$ telle que : $\frac{z'}{i} = z$

D'où les solutions de l'équation (E') sont donc le produit de la valeur i fois les solutions de l'équation (E).

$$\boxed{\text{C'est-à-dire : } z'_0 = iz_0 = i \ ; \quad z'_1 = iz_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \ ; \quad z'_2 = iz_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

3) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'')

Soit z' une solution de l'équation (E). Alors $z'^3 = 1$.

On en déduit que d'après l'équation $(2z'' + i)^3 - i^3 = 0$ on a : $z'^3 = i^3 \Leftrightarrow z'^3 = 1$ telle que :

$2z'' + i = z'$. D'où les solutions de l'équation (E'') forment un rapport dont le numérateur est la différence entre les solutions de l'équation (E') et la valeur de i et le dénominateur vaut 2.

$$\boxed{\text{C'est-à-dire : } z_0'' = \frac{z_0' - i}{2} = 0 \ ; \quad z_1'' = \frac{z_1' - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4} \ ; \quad z_2'' = \frac{z_2' - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4}}$$

4) Montrons que $z_3 = z_1 + z_2$ est imaginaire pur

On a : $z_3 = z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4} = \frac{-3i - 3i}{4} \Rightarrow \boxed{z_3 = -\frac{3}{2}i \in i\mathbb{R}}$

EXERCICE N°2 :

1) Matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Soient $\begin{cases} f(\vec{i}) = -\frac{1}{2}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -2\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_{f(\vec{i},\vec{j})} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$

2) a) Exprimons les coordonnées x' et y' de $\overrightarrow{u'}$ en fonction des coordonnées x et y de $\vec{u}$

Soit $\vec{u}\binom{x}{y} \longmapsto \overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ tel que : $f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$ avec $\begin{cases} \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \Rightarrow$

$xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \Rightarrow x\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) + y(-2\vec{\imath}) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \Rightarrow$

$(-2y)\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{2}x\right)\vec{\jmath} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Par identification, on obtient $\boxed{f = \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -\frac{1}{2}x \end{cases}}$

b) Calculons $fof(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\jmath})$

Soit $fof(\vec{\imath}) = f[f(\vec{\imath})]$

$$= f\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}f(\vec{\jmath})$$

$$= -\frac{1}{2}(-2\vec{\imath})$$

$$\boxed{\Rightarrow \ fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath}}$$

Soit $fof(\vec{\jmath}) = f[f(\vec{\jmath})]$

$$= f(-2\vec{\imath})$$

$$= -2f(\vec{\imath})$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}}$$

c) Nature de l'endomorphisme de f

Comme $\begin{cases} fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \end{cases}$ c'est-à-dire $fof = Id_E$, alors f est une symétrie vectorielle.

d) Les éléments caractéristiques de f

* Base de f : $f((x,y)) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y = -x \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow$

$x = -2y$. On a donc : $\binom{x}{y} = \binom{-2y}{y} = y\binom{-2}{1} = y\overrightarrow{u_1}$ avec $\overrightarrow{u_1}\binom{-2}{1}$.

D'où la base de f est une droite vectorielle d'équation $x = -2y$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u_1}$.

* Direction de f : $f((x,y)) = (-x,-y) \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2y \\ -y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -2y = -x \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$. On donc : $\binom{x}{y} = \binom{x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x\binom{2}{1} = x\overrightarrow{u_2}$ avec $\overrightarrow{u_2}\binom{2}{1}$.

D'où la direction de f est une droite vectorielle d'équation $y = \frac{1}{2}x$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u_2}$.

3) a) Montrons que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E

Soit $det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.

b) Pour déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, il suffit de calculer les images de $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ tels que : $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = f(-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = f(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = -2f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = 2f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = -2\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) + (-2\vec{\imath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = 2\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) + (-2\vec{\imath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) = (-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = 0\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{M_{f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

EXERCICE N°3 :

Partie A

1) Résolvons l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$

En posant $y'' = r^2\,;\, y' = r\,;\, y = 1$, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$r^2 + 2r + 1 = 0$ où $a = 1\,;\, b = 2\,;\, c = 1$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0\ \exists$ une double racine notée $r_2 =$

$r_1 = r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times1} = -1.$

Conclusion : D'où l'équation générale est de la forme $y = (Ax + B)e^{r_0 x}$, soit $y = (Ax + B)e^{-x}$

2) Déduisons la solution particulière f

Posons $f(x) = y = (Ax + B)e^{-x}$

- Soit $f(0) = 0 \Longrightarrow (A(0) + B)e^0 = 0 \Longrightarrow B = 0,\ car\ e^0 = 1.$

  Trouvons la dérivée f' de f

  $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = A(e^{-x}) - e^{-x}(Ax + B)$

  $\Longrightarrow f(x) = (-Ax + A - B)e^{-x}$

- Soit $f'(0) = 2e \Longrightarrow (-A(0) + A - B)e^0 = 2e \Longrightarrow A - B = 2e$

  $\Longrightarrow A - 0 = 2e \Longrightarrow A = 2e$

Conclusion : D'où la solution particulière de f est définie par :

$f(x) = (2xe)e^{-x} = 2xe^{1-x}, car\ \ e^a \times e^b = e^{a+b}.$

Partie B

1) Démontrons que $f'(x) = 2e^{1-x}$

$\forall\, x\ \in \mathbb{R},\ f(x) = u \times v\ \Longrightarrow\ f'(x) = u' \times v + v' \times u$

Avec $\begin{cases} u = 2x \\ v = e^{1-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 2 \\ v' = -e^{1-x} \end{cases}$

Par conséquent $f'(x) = 2e^{1-x} + 2x(-e^{1-x}) = 2e^{1-x}(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Calculons la limite de f en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe(e^{-x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2e \times \frac{x}{e^x}$

$= 2e \times 0$, car $(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe(e^{-x})$

$= -\infty$, car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3) Dressons le tableau de variations de f

* Signe de la dérivée f' de f'

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2e^{1-x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1-x$

Posons $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$,

Soit $\forall x \in]-\infty\,; 1]; f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [1\,;\,+\infty[; f'(x) \leq 0$

D'où le tableau de variations de f est défini par :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - 2x$.

a) Déduisons le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$

* Signe de la dérivée f' de f'

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, Posons $h(x) = f(x) - 2x = 0 \Rightarrow 2x(e^{1-x} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{1-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \\ \ln(e^{1-x}) = \ln(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

D'où, on a :

$\forall\, x \in [0\,;1],\ h(x) \geq 0$

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[,\ h(x) \leq 0$

b) Déduisons que $f(x) \geq 2x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

D'après la question 4) a) on a :

$\forall\, x \in [0\,;1],\ h(x) \geq 0$ or $h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow$

$\forall\, x \in [0\,;1],\ f(x) - 2x \geq 0$

D'où $f(x) \geq 2x,\ \forall\, x \in [0\,;1]$,

5) Construisons la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = 2x$.

* Etudions d'abord les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f

- Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (cas d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

- Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (possibilité d'une asymptote oblique au voisinage de $(-\infty)$).

Déterminons alors la valeur de a

Soit $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow$ a $= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2xe^{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2e(e^{-x})$$

$$= +\infty,\ car\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

Conclusion :

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction oblique (Oy) au voisinage de $(-\infty)$.

Déterminons les points d'intersections

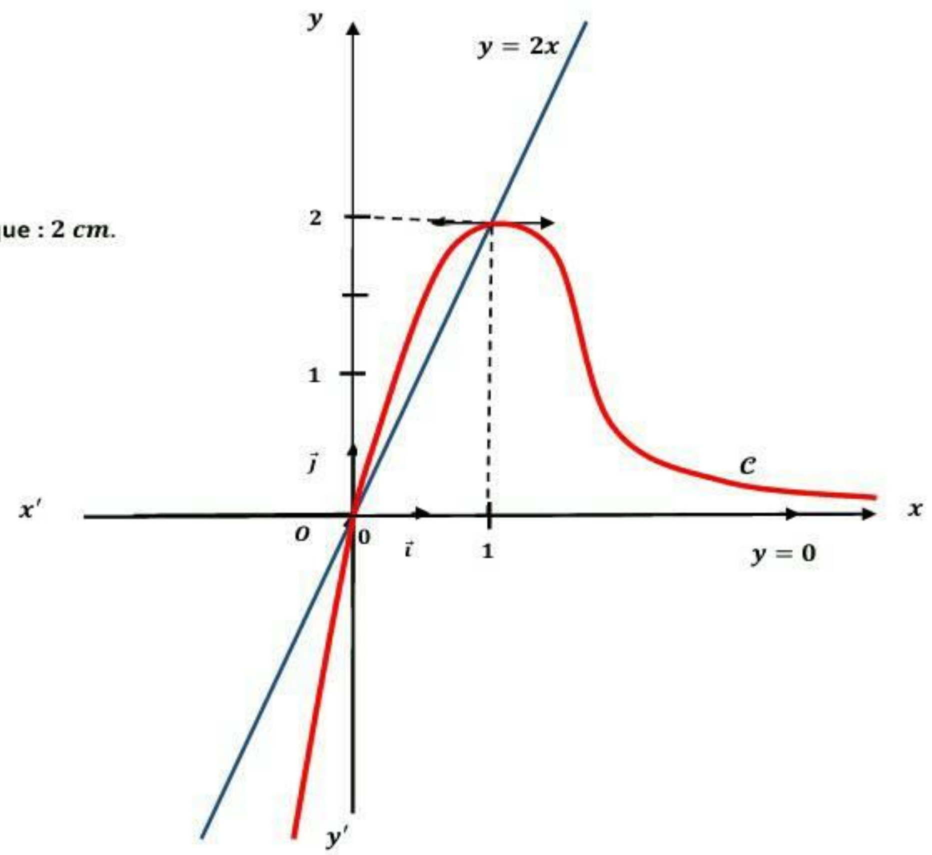
- $(\mathcal{C}) \cap (oy)$

On a : $f(0) = y \Rightarrow 2(0)e^0 = y \Rightarrow y = 0$. Soit $O(0;\ 0)$

- $(\mathcal{C}) \cap (ox)$

On a : $f(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{1-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{1-x} => 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$. Soit $O(0;\ 0)$

NB : unité graphique : 2 cm.



6) Calculons en cm^2, l'aire vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq 1$ et $2x \leq y \leq f(x)$.

$$A = \left(\int_0^1 (f(x) - y)dx\right) u.a = \left(\int_0^1 (2xe^{1-x} - 2x)dx\right) u.a$$

$$= \left|\int_0^1 (2xe^{1-x})dx - \int_0^1 2x\,dx\right| u.a = \left|\left(\left[2xe^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{1-x}dx \right) - 2\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1\right| u.a$$

$$= \left|\left(\left[2xe^{1-x}\right]_0^1 + 2\left[-e^{1-x}\right]_0^1\right) - 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| u.a \quad \text{or} \quad 1\,u.a = (2cm)^2 = 4cm^2$$

$$= \left|\left(\left[(2 \times 1e^0) - (2 \times 0e^1)\right] + 2\left[(-e^0) + e^1)\right]\right) - 2\left|\left(\frac{1}{2} \times 1^2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0^2\right)\right| \times 4\ cm^2$$

$= [2 + 2(-1 + e) - 1] \times 4\ cm^2$

$\boxed{A = 4(2e - 1)cm^2}$