INSPECTION DES LYCEES – ZONE 6

Sangha – Likouala

Département des Mathématiques

Année scolaire 2021 - 2022

Baccalauréat Blanc Zonal

Session de Mai 2022

Epreuve de : *Mathématiques*

Niveau : *Terminale* Série : D Durée : *04 heures*

EXERCICE 1 : (05 points)

1- On considère le polynôme P à variable complexe Z définie par :

$P(Z) = Z^3 - (5+i)Z^2 + (a+bi)Z - 8 - 16i$ où a et b sont deux nombres réels non nuls.

a) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(Z) = 0$. *(0,5pt)*

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$. *(0,5pt)*

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives $Z_I = 2i$; $Z_J = 3+i$; $Z_K = 2-2i$ et $Z_A = \sqrt{3}+i$.

a) Placer les points I,J, K et A dans le repère. *(0,5pt)*

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires. *(0,5pt)*

3- Soit B le point du plan tel que $Z_B = \overline{Z}_A$.

a) Calculer les distances OA ; OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB. *(0,5pt)*

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange. *(0,5pt)*

4- Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et qui laisse invariant le point O.

a) Déterminer l'écriture complexe de S. *(0,5pt)*

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. *(0,5pt)*

c) Déterminer l'expression analytique de S puis en déduire une équation cartésienne de la droite (Δ'), image de la droite (Δ) : $-4x - 6y + 11 = 0$. *(1pt)*

EXERCICE 2 : (05 points)

Dans l'espace vectoriel E muni de sa base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs suivants :

$\vec{e}_1 = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1- Montrer que $(\vec{e}_1\,;\ \vec{e}_2)$ est une base de E. *(0,5pt)*

2- On considère f l'endomorphisme de E définie dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ par :

$$\begin{cases} -3f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ 2f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) = \vec{0} \end{cases}$$

a) Exprimer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. *(1pt)*

b) Déterminer la matrice de M de f dans $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. *(0,5pt)*

c) Calculer $M \times M$; puis en déduire la nature de f. *(0,5pt)*

3- Déterminer les éléments caractéristiques de f. *(1pt)*

4- Montrer que la base et la direction de f sont deux sous- espaces vectoriels supplémentaires de E.

5- Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1\,;\ \vec{e}_2)$. *(0,5pt)*

EXERCICE 3 : (07 points)

Partie A : (1,5 point)

On considère une équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 0$

1- Résoudre l'équation (E). *(1pt)*

2- Déterminer la solution particulière $f(x)$ de (E) tel que $f(1) = 0$ *et* $f'(0) = 2$. *(0,5pt)*

Partie B : (5,5 points)

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{-x} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x} & si\ x > 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté E_f. *(0,5pt)*

2- Calculer les limites aux bornes de E_f. *(0,5pt)*

3- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ *(1pt)*

4- Etudier le signe de $f'(x)$; puis dresser le tableau de variation de f. *(1pt)*

5- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion en un point d'abscisse $x = 1$. *(0,5pt)*

6- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 1$.

7- Etudier les branches infinies de la courbe (C). *(0,5pt)*

8- Tracer la courbe (C). *(1pt)*

EXERCICE 4 : (03 points)

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est 0,6. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1- Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience aléatoire. *(1pt)*

2- Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ? *(0,5pt)*

3- Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ? *(0,5pt)*

4- Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ? *(1pt)*

• Pour $x \leq 0$: $g(x) = (x-1)e^{-x} \Rightarrow g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x}(1-x+1) \Rightarrow g'(x) = e^{-x}(2-x)$

Posons $g'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(2-x) = 0$ $\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ 2-x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

T.S

x	$-\infty$	0	2	e	$+\infty$
$g'(x)$	$+$				

d'où $\boxed{\forall x \in]-\infty ; 0] ; g'(x) > 0}$

* Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$2 \Vert +\infty$	$+$	$\Vert$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1 \nearrow +\infty$		$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

5°) Montrons que (C_f) admet un point d'inflexion en un point $x=1$:

C_f admet un pt d'inflexion en $x=1$ ssi $f''(1) = 0$

Or : $f'(x) = \dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$ ou $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln x)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)(1-\ln x)^2 - \left[2\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]\left(\frac{2}{x}\right)}{\left[(1-\ln x)^2\right]^2}$

$f''(x) = \dfrac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left[1-2\cancel{\ln x}+\ln^2 x - 2 + 2\cancel{\ln x}\right]}{\left[(1-\ln x)^2\right]^2} = \dfrac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(\ln^2 x - 1\right)}{\left[(1-\ln x)^2\right]^2} \Rightarrow f''(1) = \dfrac{\left(-\frac{2}{1}\right)\left(\ln^2(1) - 1\right)}{\left[(1-\ln 1)^2\right]^2}$

hypothèse rejetée

Or : $f''(x) = \dfrac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)(1-\ln x)^2 - \left[2\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]\left(\frac{2}{x}\right)}{\left[(1-\ln x)^2\right]^2} \Rightarrow f''(1) = \left(-\frac{2}{1}\right)(1-\ln 1)^2 - \left[2\left(-\frac{1}{1}\right)(1-\ln 1)\right]$

hypothèse rejetée

Au lieu de cette question que $x=1$ (ne pourra jamais) donc il y a eu une erreur de saisie. On devrait plutôt dire en $x = \frac{1}{e}$

* Dérivabilité en $x_0=0$

• $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1+\cancel{\ln x}+1-\cancel{\ln x}}{1-\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x(1-\ln x)}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{\underbrace{x-x\ln x}_{0}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$, d'où $f'_d(0)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{(x-1)e^{-x}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{xe^{-x}-e^{-x}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{xe^{-x}-(e^{-x}-1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}} - \underbrace{\frac{e^{-x}-1}{x}}_{-1} = \lim\limits_{x\to0^-} e^{-x}-(-1) = e^0+1 = 1+1 = 2$, d'où $f'_g(0)=2$

Conclusion : Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, alors f n'est pas dérivable en $x_0=0$

4°) * Signe de $f'(x)$:

• Pour $x>0$: $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})(1-\ln x)-(-\frac{1}{x})(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1-\cancel{\ln x}+1+\cancel{\ln x}}{x}}{(1-\ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}$ posons : $f'(x)=0 \Rightarrow 2 \neq 0$

T.S

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	$\|\|$	$+$	

$$\boxed{\forall x \in]0;e[\cup]e;+\infty[\; ; f'(x)>0}$$

2e méthode : posons $f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2\neq0 \\ x\neq0 \\ (1-\ln x)^2>0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ln x)^2>0$		$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	

, d'où $\boxed{\forall x \in]0;e[\cup]e;+\infty[\; ; f'(x)>0}$

* Pour (1)+(2) : $x^2+y^2+x^2-y^2=10-8 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow x=1$ et $x=-1$

* Pour (1)-(2) : $x^2+y^2-x^2+y^2=10+8 \Rightarrow 2y^2=18 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm\sqrt{9} \Rightarrow y=3$ et $y=-3$

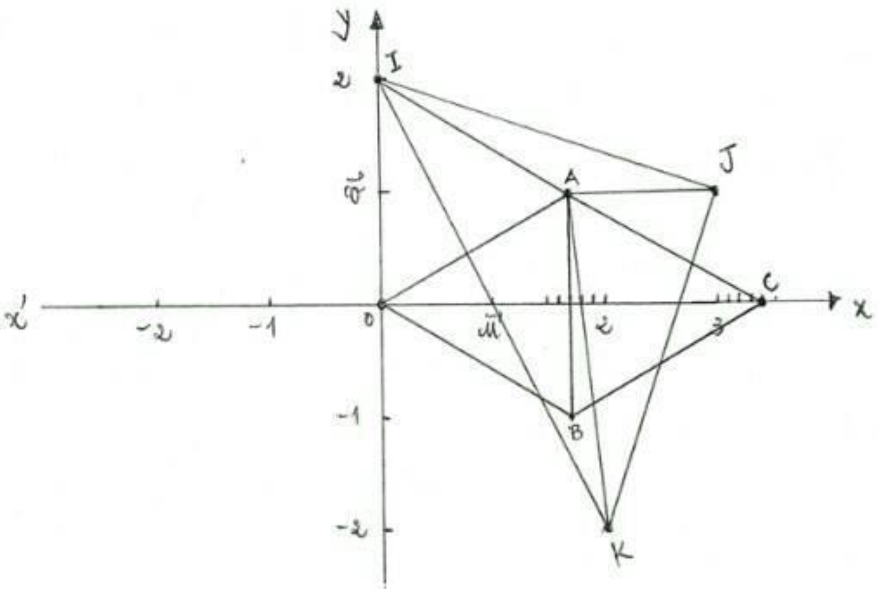
Comme $xy>0$ alors les racines auront les m signes d'où $\delta_1=1+3i$ et $\delta_2=-1-3i$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+\delta_1}{2a}=\dfrac{-(-5+i)+1+3i}{2(1)}=\dfrac{5-i+1+3i}{2}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i \\ z_2=\dfrac{-b+\delta_2}{2a}=\dfrac{-(-5+i)-1-3i}{2(1)}=\dfrac{5-i-1-3i}{2}=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i \end{cases}$$

d'où $S=\{2i\,;\,3+i\,;\,2-2i\}$

2) On donne $z_I=2i$; $z_J=3+i$; $z_K=2-2i$ et $z_A=\sqrt{3}+i$

a- Plaçons les pts I, J, K et A

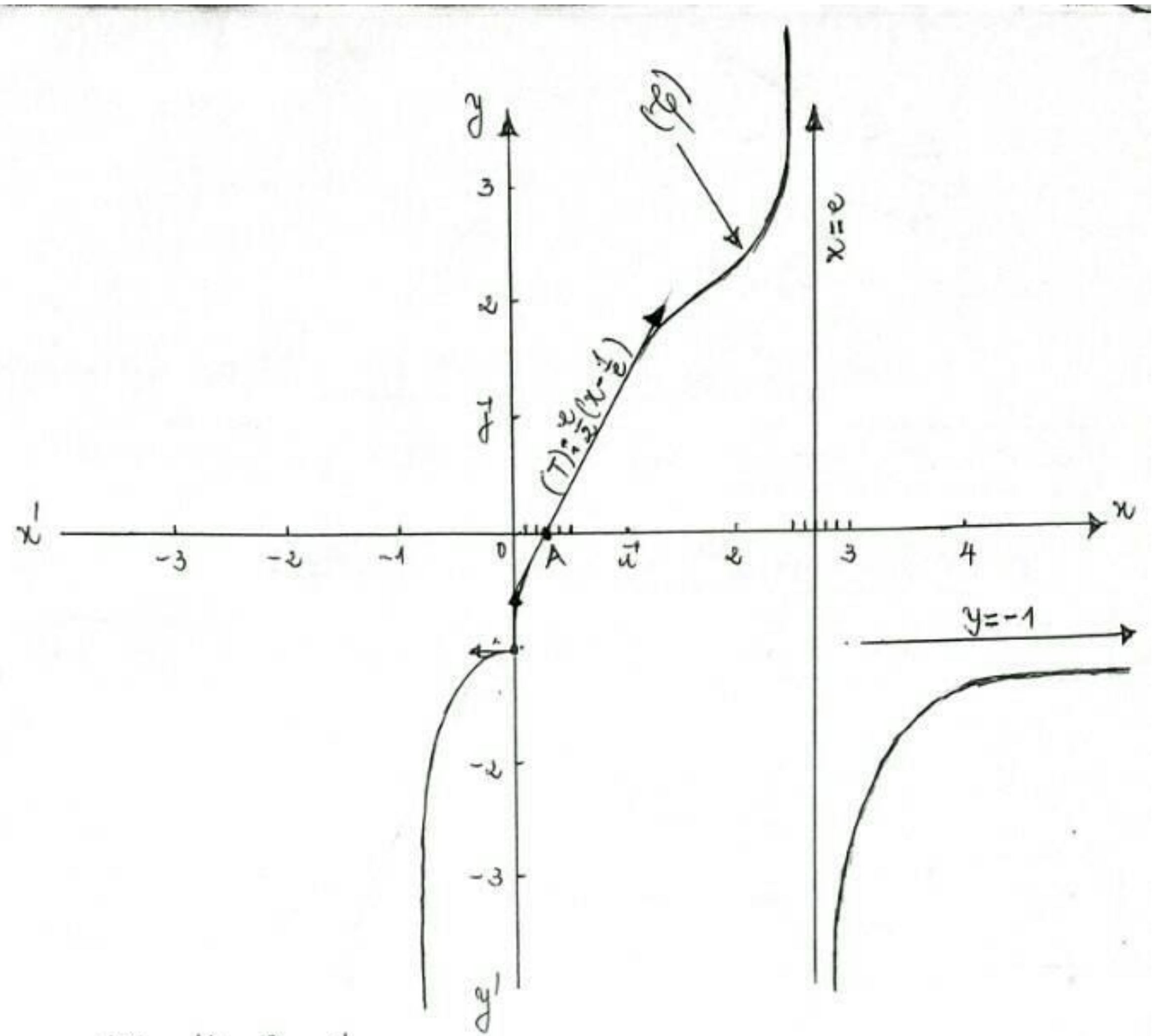


b- Démontrons que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires

(JI) et (JK) sont perpendiculaires si $\vec{JI}$ et $\vec{JK}$ sont orthogonaux : $xx'+yy'=0$

$\vec{JI}\begin{pmatrix} x_I-x_J \\ y_I-y_J \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ et $\vec{JK}\begin{pmatrix} x_K-x_J \\ y_K-y_J \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3 \\ -2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}$

$xx'+yy'=0 \Rightarrow (-3)(-1)+(1)(-3)=0 \Rightarrow 3-3=0 \Rightarrow 0=0$ vraie donc (JI) et (JK) sont $\perp$



$y = \frac{e}{2}(x - \frac{1}{e}) = \frac{e}{2}x - \frac{1}{2}$

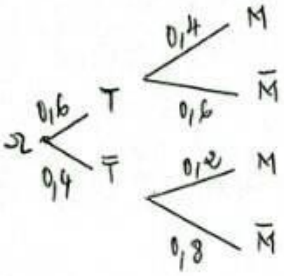
x	0	$\frac{1}{e} = 0,3$
y	$-\frac{1}{2}$	0

Solution(4):

T : « il achète un téléviseur » et M : « il achète un magnétoscope »

$P(T) = 0,6$; $P(M/T) = 0,4$ et $P(M/\bar{T}) = 0,2$

1°) Construisons l'arbre pondéré correspondant à cette expérience



2°) Calculons la probabilité qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope

$\boxed{P(T \cap M) = P(T).P(M/T)}$ AN: $P(T \cap M) = 0,6 \times 0,4$, d'où $\boxed{P(T \cap M) = 0,24}$

3°) Calculons la probabilité qu'il achète un magnétoscope:

$\boxed{P(M) = P(T \cap M) + P(\bar{T} \cap M)}$ AN: $P(M) = 0,24 + (0,4 \times 0,2)$, d'où $\boxed{P(M) = 0,32}$

4°) Calculons $P(T/M)$

$\boxed{P(T/M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)}}$ AN: $P(T/M) = \frac{0,24}{0,32} = 0,75$, d'où $\boxed{P(T/M) = 0,75}$

Ken-fils

Fait par : Monsieur Ken MOULIE (06 835 36 30)

Supervisé par : Monsieur Loïc BOTELA

Solution (2) :

Considérons les vecteurs suivants : $\vec{e_1} = -3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_2} = 2\vec{i} + \vec{j}$

1°) Montrons que $(\vec{e_1} ; \vec{e_2})$ est une base de E :

$\det_{(\vec{e_1}, \vec{e_2})} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (-3)(1) - (2)(1) = -3 - 2 = -5 \neq 0$ vraie alors $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base

2°) Considérons f l'endomorphisme de E définie par :

$$\begin{cases} -3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j} \\ 2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{0} \end{cases}$$

a-/ Exprimons $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} -3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j} & \times(-1) \\ 2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{0} & \times(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(\vec{i}) - \cancel{f(\vec{j})} = 3\vec{i} - \vec{j} \\ 2f(\vec{i}) + \cancel{f(\vec{j})} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow 5f(\vec{i}) = 3\vec{i} - \vec{j}$$

d'où $\boxed{f(\vec{i}) = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j}}$

Eq : $2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{j}) = -2f(\vec{i}) = -2\left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{f(\vec{j}) = -\frac{6}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}}$

b-/ Matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}}$$

c-/ * Calculons $M \times M$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\frac{9}{25} + \frac{6}{25}] & [-\frac{18}{25} - \frac{12}{25}] \\ [-\frac{3}{25} - \frac{2}{25}] & [\frac{6}{25} + \frac{4}{25}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{25} & -\frac{30}{25} \\ -\frac{5}{25} & \frac{10}{25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$ d'où $\boxed{M \times M = M}$

* Déduisons la nature de f : Comme $M \times M = M$ alors f est projection vectorielle

3°) Elements caractéristiques de f

* base : $\{\forall \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ avec $x' = x$ et $y' = y$

– cherchons l'expression analytique

$\vec{u}' = M_f \times \vec{u}$ or $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y \\ y' = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}y = 0 \\ y + \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y = 0 \\ \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}(x+3y) = 0 \\ \frac{1}{5}(x+3y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y = 0 \\ x+3y = 0 \end{cases}$ Alors le système se réduit en une seule équation $x+3y=0$

d'où $\boxed{\text{base} : \{\vec{u} \in E / x+3y=0\}}$

* direction : $\{\forall \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$ avec $x'=0$ et $y'=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y \\ y' = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y = 0 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}(x-2y) = 0 \\ -\frac{1}{5}(x-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases}$ Alors le système se réduit en une seule équation $x-2y=0$

d'où $\boxed{\text{direction} : \{\vec{u} \in E / x-2y=0\}}$

4°) Montrons que la base et la direction sont deux S.e.V.S de E

base et direction sont deux S.e.V.S ssi $\begin{cases} \text{base} \cap \text{direction} = \{\vec{0}\} \\ \dim(\text{base}) + \dim(\text{direct}^{\circ}) = \dim(E) \end{cases}$

* Pour base $\cap$ direct$^{\circ} = \{\vec{0}\}$

Solution (3):

Partie A: Considérons une équation différentielle (E): $y''+2y'+y=0$

1°) Résolvons (E): $y''=r^2 \quad y'=r$ et $y=1$

$r^2+2r+1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(1)=4-4=0 \;\exists\; r_1=r_2=r$

$r=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=-1$ $\quad$ Sq: $y=(A+xB)e^{rx}$, d'où $\boxed{y=(A+xB)e^{-x}}$

2°) Déterminons la solution particulière:

posons: $y=f(x) \Rightarrow f(x)=(A+xB)e^{-x} \Rightarrow f'(x)=Be^{-x}-e^{-x}(A+xB)$

$\begin{cases} f(x)=(A+xB)e^{-x} \\ f'(x)=Be^{-x}-e^{-x}(A+xB) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=(A+B)e^{-1} \\ f'(0)=Be^{0}-e^{0}(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=\frac{A+B}{e} \\ f'(0)=B-A \end{cases}$ or $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(0)=2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{A+B}{e}=0 \\ B-A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{cases} \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow \underline{B=1}$

Sq: $A+B=0 \Rightarrow A+1=0 \Rightarrow A=-1$ $\quad$ d'où $\boxed{f(x)=(-1+x)e^{-x} \text{ ou } f(x)=(x-1)e^{-x}}$

Partie B: Considérons la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=(x-1)e^{-x} \;;\; x\leq 0 \\ f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x} \;;\; x>0 \end{cases}$

1°) Déterminons l'ensemble de définition de f:

* Pour $x\leq 0$: $f(x)\;\exists\;\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$ $\quad E_{f_1}=]-\infty;0]$

* Pour $x>0$: $f(x)\;\exists$ si $\begin{cases} 1-\ln x\neq 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x\neq 1 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\ln x}\neq e^{1} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq e \\ x>0 \end{cases}$

$-\infty \quad 0 \quad e \quad +\infty$ $\quad E_{f_2}=]0;e[\cup]e;+\infty[$

c-/ * L'expression analytique de (S)

On a : $(S) : z' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$ or $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy \Rightarrow x' + iy' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy)$

$x' + iy' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}iy + i\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \left(\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y\right)$

Par analogie : $\boxed{\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x' = \frac{3x - \sqrt{3}y}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}x + 3y}{2} \end{cases}}$

* Equation cartesienne de la droite (Δ') :

• Cherchons x et y : $\begin{cases} x' = \frac{3x - \sqrt{3}y}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}x + 3y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 3x - \sqrt{3}y = 2x' & \times\sqrt{3} \\ (2)\ \sqrt{3}x + 3y = 2y' & \times(1) \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \cancel{3y} = 2\sqrt{3}x' \\ \sqrt{3}x + \cancel{3y} = 2y' \end{cases} \Rightarrow 4\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x' + 2y' \Rightarrow 2\sqrt{3}x = \sqrt{3}x' + y' \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{6}y'}$

• Remplaçons x dans (2) : $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{6}y'\right) + 3y = 2y' \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 3y = 2y'$

$3y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 2y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{3}{2}y' \Rightarrow \underline{y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x' + \frac{1}{2}y'}$

• Remplaçons enfin x et y dans (Δ) : on a $-4x - 6y + 11 = 0$

$-4\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{6}y'\right) - 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x' + \frac{1}{2}y'\right) + 11 = 0 \Rightarrow -2x' - \frac{2\sqrt{3}}{3}y' + \sqrt{3}x' - 3y' + 11 = 0$

$\frac{-6x' - 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{3}x' - 9y' + 33}{3} = 0 \Rightarrow -6x' + 3\sqrt{3}x' - 2\sqrt{3}y' - 9y' + 33 = 0$

d'où $\boxed{(\Delta') : (3\sqrt{3} - 6)x' - (9 + 2\sqrt{3})y' + 33 = 0}$

Suite de la question 4) b-/

* Centre : Comme le point O est invariant alors O est le centre d'où $\boxed{z_0 = 0}$

Correction du Baccalauréat Blanc 2022

(Inspection des lycées Zone VI : ILZ6 "Sangha-Likouala) Série D

Solution(1) :

1°) Considérons le polynôme P définie par : $P(z)=z^3-(5+i)z^2+(a+bi)z-8-16i$

a-/ Déterminons les réels a et b tel que 2i est racine de $P(z)=0$

$(2i)^3-(5+i)(2i)^2+(a+ib)(2i)-8-16i=0 \Rightarrow -8i-(5+i)(-4)+2ai-2b-8-16i$

$-24i+20+4i+2ai-2b-8=0 \Rightarrow -20i+2ai+12-2b=0 \Rightarrow (12-2b)+(-20+2a)i=0$

$\begin{cases} 12-2b=0 \\ -20+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b=-12 \\ 2a=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{12}{2} \\ a=\frac{20}{2} \end{cases}$ d'où $\boxed{a=10 \text{ et } b=6}$

b-/ Résolvons $P(z)=0$

étant donné que $P(z)=0$ admet une solution 2i donc 2i est une racine évidente de P, d'où on aura : $P(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$ avec $z_0=2i$

$P(z)=(z-2i)(az^2+bz+c)$

* Par horner :

	1	$-5-i$	$10+6i$	$-8-16i$
$2i$	↓	$2i$	$-2-10i$	$8+16i$
	1	$-5+i$	$8-4i$	0

$P(z)=(z-2i)\left[z^2+(-5+i)z+8-4i\right]=0$ $\begin{cases} z-2i=0 \\ z^2+(-5+i)z+8-4i=0 \end{cases}$

* Pour : $z-2i=0 \Rightarrow z_0=2i$

* Pour : $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$ $\quad \Delta=(-5+i)^2-4(1)(8-4i)=25-10i-1-32+16i$

$\Delta=-8+6i$

$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{(8)^2+(6)^2} \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ xy=3 & (3) \end{cases}$

$E_f = E_{f_1} \cup E_{f_2} =]-\infty;0] \cup]0;e[\cup]e;+\infty[$ d'où $\boxed{E_f =]-\infty;e[\cup]e;+\infty[}$

2°) Calculons les limites de f

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \frac{\frac{1}{+\infty}+1}{\frac{1}{+\infty}-1} = \frac{1}{-1} = -1$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

* $\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \frac{1+\ln e}{1-\ln e} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty$

Etudions le signe : posons $1-\ln x = 0 \Rightarrow x = e$

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$1-\ln x$	$+$	0	$-$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = -\infty}$

3°) * Continuité en $x_0 = 0$

- $f(0) = (0-1)e^0 = -1 \Rightarrow \underline{f(0) = -1}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}-1} = \frac{\overbrace{\frac{1}{-\infty}}^{0}+1}{\underbrace{\frac{1}{-\infty}}_{0}-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$\underline{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -1}$

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (x-1)e^{-x} = (0-1)e^0 = -1 \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1}$

Conclusion : Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = -1$ alors f est continue en $x_0 = 0$

AN : $f''(x) = \frac{(-2/x^2)(\ln x - 1)}{[(1-\ln x)^2]^2} = \frac{(\frac{-2}{1/e^2})(\ln(e^{-1})-1)}{[(1-\ln e^{-1})^2]^2} = \frac{-2e^2(1-1)}{((1+1)^2)^2} = \frac{0}{16} = 0$

Comme $f''(\frac{1}{e})$ ou $f''(e^{-1}) = 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion en $x_0 = \frac{1}{e}$

6°) Déterminons une équation cartésienne de la tangente en $x = \frac{1}{e}$

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $\begin{cases} f(\frac{1}{e}) = \frac{1+\ln e^{-1}}{1-\ln e^{-1}} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \\ f'(\frac{1}{e}) = \frac{2}{\frac{1}{e}(1-\ln e^{-1})^2} = \frac{2}{\frac{1}{e}(1+1)^2} = \frac{2}{\frac{4}{e}} = \frac{2e}{4} = \frac{e}{2} \end{cases}$

d'où $\boxed{(T) : y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{e}\right)}$

7°) Branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; On calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-1)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

* $\lim\limits_{x\to e^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = e}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = -1}$

8°) Traçons $(\mathcal{C}_f)$

* Point d'intersection :

$(\mathcal{C}_f) \cap (Ox)$: $f(x) = 0$ sur $x > 0$

$\frac{1+\ln x}{1-\ln x} = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1}$ ou $x = \frac{1}{e}$

d'où $A\begin{pmatrix} \frac{1}{e} \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $A\begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0 \end{pmatrix}$

3°) Soit B le point du plan tel que $z_B = \overline{z_A}$, donc $z_B = \sqrt{3} - i$

a-/. Calculons les distances

* $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ d'où $\boxed{OA = 2}$ cm

* $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ d'où $\boxed{OB = 2}$ cm

* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ d'où $\boxed{AB = 2}$ cm

. Déduisons la nature du triangle : AOB est un triangle équilatéral en O

b-/ Déterminons z_C :

AOBC est un losange ssi : $\vec{OA} = \vec{BC} \Rightarrow z_A - \underset{0}{z_O} = z_C - z_B \Rightarrow z_C = z_A + z_B$

$z_C = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3}$ d'où $\boxed{z_C = 2\sqrt{3}}$

4°) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et qui laisse O invariant

a-/ Ecriture complexe

$$\begin{cases} z' = az + b & (O \to O) \\ z' = az + b & (B \to C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underset{0}{z_O} = a\underset{0}{z_O} + b \\ z_C = a z_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a z_B = z_C \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_C}{z_B} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$$

$a = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{3+1} = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\boxed{(S) : z' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z}$

b-/ Elements caractéristiques :

* rapport : $k = |a| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$ d'où $\boxed{k = \sqrt{3}}$

* Angle : $\theta = \begin{cases} \cos\theta = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3(2\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} [2\pi]}$

$$\begin{cases} x+3y=0 & \times 2 \\ x-2y=0 & \times 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6y=0 \\ 3x-6y=0 \end{cases} \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

Aq : $x+3y=0$ si $x=0 \Rightarrow 0+3y=0 \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow \underline{y=0}$

Comme $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ Alors base $\cap$ direction $=\{\vec{0}\}$ vraie

* Pour $\underline{\dim(\text{base})+\dim(\text{direct}^{\circ})=\dim(E)}$

- Comme E est muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$, donc $\underline{\dim(E)=2}$
- Aq base $=\{\forall \vec{u}\in E / x+3y=0\}$ engendré par le vecteur $\vec{e}_1\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, donc $\underline{\dim(\text{base})=1}$
- Aq direction $=\{\vec{u}\in E / x-2y=0\}$ engendré par le vecteur $\vec{e}_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc $\underline{\dim(\text{direction})=1}$

AN : $1+1=2 \Rightarrow 2=2$ Alors $\dim(\text{base})+\dim(\text{direct}^{\circ})=\dim(E)$

Conclusion : la base et la direction sont deux s.e.v.s de E

5°) Matrice de f dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

$$\begin{cases} \vec{e}_1=-3\vec{i}+\vec{j} \\ \vec{e}_2=2\vec{i}+\vec{j} \end{cases} \quad \text{Aq} \quad \begin{cases} -3f(\vec{i})+f(\vec{j})=-3\vec{i}+\vec{j} \\ 2f(\vec{i})+f(\vec{j})=\vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3\vec{i}+\vec{j})=\vec{e}_1 \\ f(2\vec{i}+\vec{j})=\vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2)=\vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+0\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2)=0\vec{e}_1+0\vec{e}_2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{M_f=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$$